Tome 20 N° 10 Octobre 1959

LE JOURNAL DE PHYSIQUE
ET
LE RADIUM

EFFET DES IMPURETÉS SUR LA DENSITÉ ÉLECTRONIQUE DANS LES MÉTAUX. I.

Par E. DANIEL,
Physique des Solides, 60, Bd St-Michel, Paris.

Résumé. — La première partie de cet article est consacrée à l'étude théorique des variations de densité électronique produites par un potentiel perturbateur central dans un gaz d'électrons libres. Elle met en évidence le fait que, même si la portée du potentiel est courte, les variations de densité peuvent permettre des interactions à distance assez grande dans un métal, car leur amplitude décroît seulement comme l'inverse du carré de la distance au centre diffuseur. La charge d'écran est presque toute concentrée dans la région où le potentiel est notable ; à l'extérieur de cette région, les variations locales de densité peuvent être importantes même si leur intégrale dans l'espace est petite. On justifie enfin, en dégageant sa signification, l'emploi d'un potentiel en puits carré pour représenter un atome dissous dans un métal, sous réserve de satisfaire à la règle des déphasages.
Ces résultats sont appliqués dans la seconde partie pour expliquer les variations du déplacement de Knight de la matrice dans un alliage dilué. La théorie développée rend compte de façon quantitative de la proportionnalité de ces variations aux concentrations d'alliage, ainsi que de l'élargissement des raies de résonance.

Abstract. — The first part of this paper is devoted to a theoretical study of the changes of electron density in a free-electron gas due to a central perturbing potential. It shows that, even for short-range potentials, the density variations allow for fairly long range interactions in a metal, for their amplitude decreases only as the inverse square of the distance from the diffusing center. Almost all the screening charge is concentrated in the region where the potential is important; outside this region, the local variations of density may be important even if their integral over the space is small. Finally, the use of a square-well potential to represent an atom dissolved in a metal, as long as it obeys the phase-shift sum-rule, is justified and its meaning is explained.
These results are used in the second part of the paper to explain the variations of the Knight shift of the matrix in a dilute alloy. The theory accounts quantitatively for these variations being proportional to the concentration of the alloy, as well as for the broadening of the resonance lines.

PREMIÈRE PARTIE

PERTURBATION D'UN GAZ D'ÉLECTRONS PAR UN POTENTIEL A SYMÉTRIE SPHÉRIQUE

1. Introduction. — Les phénomènes que nous étudions dans la suite sont caractérisés par la situation physique suivante : dans un métal A, on a introduit soit des particules chargées ponctuelles (positon, muon, trou positif dans une couche couche interne), soit des atomes d'un autre métal B qui forme avec A un alliage de substitution. Que ce soit une particule ou un atome B dissous, l'impureté introduite perturbe la structure électronique du métal A. Nous nous proposons de dégager certains aspects de cette perturbation qui sont essentiels pour l'interprétation de diverses expériences : déplacement de Knight dans les alliages, annihilation du positon dans les métaux, etc... A cet effet, nous commençons par schématiser la situation à l'extrême de la façon suivante : nous assimilons les électrons de conductibilité du métal A à un gaz d'électrons libres pour lequel l'impureté joue le rôle d'un potentiel diffuseur. Nous supposons que ce potentiel a la symétrie sphérique et nous étudions les variations de densité qu'il crée dans le gaz d'électrons. Nous rappelons d'abord brièvement la méthode de Thomas-Fermi linéarisée pour montrer qu'elle est insuffisante, puis nous exposons plus en détail une solution meilleure basée sur la méthode des ondes partielles ; enfin, nous terminons cette première partie en indiquant les raisons qui peuvent déterminer le choix d'un potentiel simple selon le problème particulier considéré.

2. **Méthode de Thomas-Fermi linéarisée** [1], [2], [3]. — Nous supposons que le potentiel perturbateur $V_P(r)$ ne dépend que de la distance r au centre 0 de l'impureté. En son absence, et si on néglige les corrélations, la densité du gaz d'électrons est uniforme. Compte tenu des deux directions possibles du spin de chaque électron, la densité des états quantifiés du gaz non perturbé est [4] : $g(E) = k/\pi^2$ par unité de volume et unité d'énergie [1] pour les électrons d'énergie comprise dans l'intervalle $(E, E + \mathrm{d}E)$, avec $E = \frac{1}{2}k^2$. Soit $E_F = \frac{1}{2}k_F^2$ l'énergie de Fermi du gaz non perturbé ; sa densité par unité de volume vaut :

$$q(E_F) = \int_0^{k_F} g(E)\,\mathrm{d}E = \int_0^{k_F} \frac{k^2\,\mathrm{d}k}{\pi^2} = \frac{k_F^3}{3\pi^2}. \tag{1}$$

Dans l'approximation de Thomas-Fermi, on admet que si V_P varie peu sur une distance comparable à la longueur d'onde des électrons au niveau de Fermi, la densité électronique vaut, à la distance r dans le gaz perturbé :

$$q'(E'_F, r) = q[E'_F - V(r)]$$

E'_F désignant le niveau de Fermi du gaz perturbé. On suppose qu'un fond continu de charge positive de densité uniforme $q(E_F)$ assure la neutralité électrique du système pris dans son ensemble. L'équation de Poisson à laquelle satisfait le potentiel V_P s'écrit :

$$\Delta V_P = -4\pi[q(E'_f - V_P) - q(E_F)] \tag{2}$$

où Δ est l'opérateur laplacien.

Pour les valeurs de r telles que V_P soit petit devant E_F, on obtient, en développant le second membre de l'équation (2) au premier ordre en V_P :

$$\Delta V_P = \lambda^2(V_P - \delta E_F) \tag{3}$$

avec :

$$\delta E_F = E'_F - E_F \quad \text{et :} \quad \lambda^2 = 4\pi\left(\frac{\partial q}{\partial E}\right)_{E=E_E} = \frac{4k_F}{\pi}.$$

Appliquons ceci au cas où le potentiel V_P est dû à l'introduction d'une charge ponctuelle Z en 0. Les électrons du gaz se réarrangent autour de cette charge de façon à lui faire écran à grande distance. Les seules solutions acceptables de l'équation (3) sont celles qui s'annulent à l'infini.

(1) Sauf indication du contraire, nous utilisons dans tout le texte les unités atomiques (U. A.) de Hartree : charge de l'électron : $|e| = 1$; masse de l'électron au repos : $m = 1$; constante de Planck réduite : $\hbar = 1$.
En particulier, l'unité de longueur est égale au rayon de Bohr de l'atome d'hydrogène : $a_0 = 0{,}529.10^{-8}$ cm ; l'unité d'énergie vaut deux fois l'énergie d'ionisation de l'hydrogène, soit 27,2 eV.

Elles sont de la forme :

$$V_P = \text{const.} \times \frac{e^{-\lambda r}}{r}, \quad \text{avec} \quad \delta E_F = 0 \tag{4}$$

indiquant que le niveau de Fermi du gaz reste inchangé. Au voisinage de l'origine, les hypothèses de l'approximation de Thomas-Fermi ne sont plus vérifiées ; l'écran y devient négligeable et V_P tend vers $-Z/r$. Tenant compte de la forme (4) de la solution à grande distance, on prend :

$$V_P = -\frac{Z}{r}e^{-\lambda r} \tag{5}$$

dans tout l'espace. L'équation (2) donne alors pour accroissement de la densité de charge électrique par unité de volume, à la distance r de 0, la valeur :

$$\delta q(r) = \frac{\lambda^2}{4\pi}\frac{Z}{r}e^{-\lambda r} = \frac{k_F}{\pi^2}\frac{Z}{r}e^{-\lambda r}. \tag{6}$$

En intégrant dans tout l'espace, on vérifie que la charge d'écran totale $\int \delta q\,\mathrm{d}v$ est bien égale à Z.

La formule (6) donne une intensité infinie à l'origine, même pour les électrons d'énergies comprises dans un intervalle E, $E + \mathrm{d}E$ très étroit. Ceci est en contradiction avec les mesures du déplacement de Knight de la résonance nucléaire [5] et celles du temps de vie du positon dans les métaux [6], [7]. De plus, d'après cette formule, l'excès de densité électronique décroît exponentiellement avec la distance au point 0, en gardant un signe constant, celui de Z. Avec Z positif et égal à la différence de valence entre l'argent d'une part, et le cadmium, l'indium, l'étain ou l'antimoine, d'autre part, on obtient un résultat du signe contraire à celui qui convient pour expliquer les variations observées du déplacement de Knight de l'argent quand on y dissout l'un de ces métaux.

En résumé, la méthode de Thomas-Fermi ne donne qu'une image assez grossière de la polarisation d'un gaz d'électrons par un centre chargé. Elle fournit, au moyen du paramètre λ, un ordre de grandeur du rayon de l'écran électronique : quelques unités atomiques. Inutilisable au voisinage du centre, elle ne révèle pas les détails de la variation de densité électronique avec la distance.

3. **Méthode des ondes partielles.** — Pour faire mieux que l'approximation de Thomas-Fermi, il devient nécessaire de résoudre l'équation de Schrödinger pour le potentiel perturbateur. Ceci se fait avantageusement par la méthode des ondes partielles quand le potentiel a la symétrie sphérique. Nous obtiendrons ainsi une densité électronique finie en tout point et, en particulier à l'origine, et des variations locales de densité s'étendant bien au delà du potentiel pour les électrons d'un petit intervalle d'énergie.

Considérons un gaz d'électrons libres dont nous

négligeons les corrélations. Au point de rayon vecteur $\boldsymbol{r}$, la fonction d'onde $\psi_{\mathbf{k}}^0$ d'un électron d'énergie $E = \frac{1}{2} k^2$ et d'impulsion $\boldsymbol{k}$, normalisée dans un grand volume V, s'écrit :

$$\psi_{\mathbf{k}}^0(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k}.\mathbf{r}}. \tag{7}$$

Introduisons dans ce gaz un potentiel perturbateur $V_P(r)$ à symétrie sphérique autour de l'origine et nul pour $r > a$, le rayon a étant, pour fixer les idées, de l'ordre de quelques unités atomiques, comme le suggèrent les résultats de la méthode de Thomas-Fermi.

Nous allons montrer que la diffusion des électrons par ce potentiel crée, même à grande distance, des fluctuations dans la densité du gaz d'électrons.

Soit :

$$\psi_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{V}} [e^{i\mathbf{k}.\mathbf{r}} + \psi_{\mathbf{k}}^d] \tag{8}$$

la fonction d'onde d'un électron d'impulsion $\boldsymbol{k}$ diffusé par le potentiel V_P. Cette fonction a la même amplitude que $\psi_{\mathbf{k}}^0$ à grande distance ; en vertu du théorème de von Laue [8], nous conservons la même densité d'états $g = k/\pi^2$ par unité de volume et unité d'énergie que dans le gaz non perturbé. Dans l'espace réciproque, ceci correspond à une densité d'états ϖ par unité de volume telle que :

$$\varpi . 4\pi k^2 \, dk = g \, dE = k^2 \, dk/\pi^2 \; ; \quad \text{soit :} \quad \varpi = 1/4\pi^3.$$

En l'absence du potentiel V_P, la densité au point r des électrons d'énergie comprise entre E et $E + dE$ était :

$$\rho(E) \, dE = V \frac{1}{4\pi^3} k^2 \, dk \int_0^{4\pi} \psi_{\mathbf{k}}^{0*} \, \psi_{\mathbf{k}}^0 \, d\Omega = g \, dE$$

($d\Omega$ est l'élément d'angle solide dans l'espace réciproque). En présence de V_P, elle est devenue :

$$[\rho(E) + \delta\rho(E, \boldsymbol{r})] \, dE = V \frac{k^2 \, dk}{4\pi^3} \int_0^{4\pi} \psi_{\mathbf{k}}^* \, \psi_{\mathbf{k}} \, d\Omega$$
$$= V \frac{g \, dE}{4\pi} \int_0^{4\pi} \psi_{\mathbf{k}}^* \, \psi_{\mathbf{k}} \, d\Omega.$$

L'introduction du potentiel V_P produit donc au point $\boldsymbol{r}$ une variation relative de densité des électrons d'énergie E égale à :

$$\frac{\delta\rho(E, \boldsymbol{r})}{\rho(E)} = \frac{V}{4\pi} \int_0^{4\pi} [\psi_{\mathbf{k}}^* \, \psi_{\mathbf{k}} - \psi_{\mathbf{k}}^{0*} \, \psi_{\mathbf{k}}^0] \, d\Omega. \tag{9}$$

La symétrie du potentiel V_P nous permet d'analyser les fonctions d'ondes (7) et (8) en composantes sphériques. Soit θ l'angle des vecteurs $\boldsymbol{k}$ et $\boldsymbol{r}$. Pour $r > a$, on a [9] :

$$\left.\begin{aligned} e^{i\mathbf{k}.\mathbf{r}} &= \sum_{l=0}^{\infty} i^l \sqrt{2(2l+1)} \, j_l(kr) \, P_l(\cos\theta) \\ e^{i\mathbf{k}.\mathbf{r}} + \psi_{\mathbf{k}}^d &= \sum_{l=0}^{\infty} i^l \sqrt{2(2l+1)} \, e^{i\eta_l} f_l(kr) \, P_l(\cos\theta) \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

avec :

$$f_l(kr) = j_l(kr) \cos \eta_l - n_l(kr) \sin \eta_l.$$

Dans ces formules, j_l et n_l sont respectivement les fonctions sphériques de Bessel et de Neumann d'ordre entier l, P_l le polynôme de Legendre normé d'ordre l et η_l le déphasage introduit par le potentiel V_P dans la $l^{\text{ième}}$ composante sphérique de la fonction d'onde.

En portant les développements (10) dans l'égalité (9), il vient, après intégration sur toutes les directions de $\boldsymbol{k}$:

$$\frac{\delta\rho(E, r)}{\rho(E)} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)$$
$$\left\{ [n_l^2(kr) - j_l^2(kr)] \sin^2 \eta_l - j_l(kr) \, n_l(kr) \sin 2\eta_l \right\}. \tag{11}$$

Quand r croît, cette expression prend des valeurs alternativement positives et négatives. Pour les grandes valeurs de r, l'amplitude de ses oscillations décroît comme $1/r^2$; on s'en rend compte clairement sur la forme asymptotique [3] :

$$\frac{\delta\rho(E, r)}{\rho} \to \sum_l (-1)^l (2l+1) \sin \eta_l \frac{\sin(2kr + \eta_l)}{(kr)^2}$$

quand $r \to \infty$.

Quand on connaît les déphasages η_l en fonction de k, on peut calculer, à l'aide de la relation (11), la quantité Q de charge d'écran qui se trouve à l'extérieur de la sphère de rayon a :

$$Q = \int_0^{E_F} dE \int_{r>a} \delta\rho(E, r) \, dv$$
$$= \frac{4}{\pi} \sum_l \left\{ (2l+1) \int_0^{k_F} k^2 \, dk \int_a^{\infty} \left\{ [n_l^2(kr) - j_l^2(kr)] \right.\right.$$
$$\left.\left. \sin^2 \eta_l(k) - j_l(kr) \, n_l(kr) \sin 2\eta_l(k) \right\} r^2 \, dr \right.$$
$$= \frac{1}{\pi^2} \sum_l \int_0^{k_F} \frac{dk}{k} [\alpha_l(ka) \sin^2 \eta_l + \beta_l(ka) \sin 2\eta_l] \tag{12}$$

avec [10]

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0(x) &= 4\pi \int_x^{\infty} [n_0^2(u) - j_0^2(u)] \, u^2 \, du \\ &= -2\pi \sin 2x \\ \beta_0(x) &= -4\pi \int_x^{\infty} j_0(u) \, n_0(u) \, u^2 \, du = \pi \cos 2x \\ \alpha_l(x) &= 4\pi(2l+1) \int_x^{\infty} [n_l^2(u) - j_l^2(u)] \, u^2 \, du \\ &= 2\pi(2l+1) \, x^3 [j_l^2(x) - n_l^2(x) \\ &\quad - j_{l-1}(x) \, j_{l+1}(x) + n_{l-1}(x) \, n_{l+1}(x)] \\ \beta_l(x) &= -4\pi(2l+1) \int_x^{\infty} j_l(u) \, n_l(u) \, u^2 \, du \\ &= 2\pi(2l+1) \, x^3 \Big\{ j_l(x) \, n_l(x) \\ &\quad - \frac{1}{2} [j_{l-1}(x) \, n_{l+1}(x) + j_{l+1}(x) \, n_{l-1}(x)] \Big\} \end{aligned}\right\} \text{pour } l > 0 \tag{13}$$

Nous allons montrer sur un exemple que les variations locales de densité dans le gaz d'électrons peuvent être importantes bien que la charge d'écran soit presque entièrement localisée dans la sphère d'impureté, c'est-à-dire bien que la charge Q extérieure à cette sphère soit très petite.

4. **Distribution de charge dans le cas d'un puits carré de potentiel.** — Nous montrerons au paragraphe suivant que la perturbation produite dans un métal par une impureté de substitution peut être représentée avec une bonne approximation par un puits de potentiel de rayon et de profondeur convenablement choisis. Puisque cette étude nous servira par la suite, nous en profitons pour illustrer les résultats du paragraphe précédent sur l'exemple simple où V_P est un puits de potentiel de rayon a

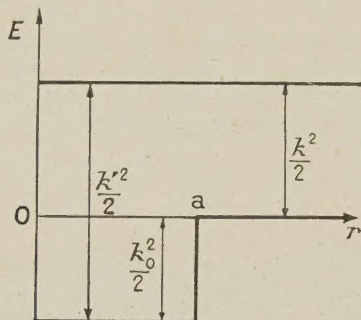


Fig. 1. — Potentiel en puits carré.

et de profondeur $k_0^2/2$ (*fig.* 1). Nous traiterons plus loin, à propos de l'annihilation du positon, le cas du potentiel coulombien avec écran.

Les déphasages se calculent aisément sur ce modèle [11]. En posant : $k_0^2 + k^2 = k'^2$, leurs tangentes s'expriment au moyen des fonctions de Bessel et de Neumann sphériques par les formules :

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\eta_0 &= \frac{ka\ j_1(ka) - \beta_0\ j_0(ka)}{ka\ n_1(ka) - \beta_0\ n_0(ka)} \\ &\text{avec : } \beta_0 = k'a\frac{j_1(k'a)}{j_0(k'a)}, \\ \operatorname{tg}\eta_l &= \frac{ka\ j_{l-1}(ka) - \beta_l\ j_l(ka)}{ka\ n_{l-1}(ka) - \beta_l\ n_l(ka)} \\ &\text{avec : } \beta_l = k'a\frac{j_{l-1}(k'a)}{j_l(k'a)} \text{ pour } l > 0. \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

La figure 2 représente les déphasages que nous avons calculés de cette façon pour le puits de potentiel caractérisé par : $k_0\,a = 1{,}4$ et $k_F\,a = 2$, avec $k_F = 0{,}64$. Au delà de $l = 2$, les déphasages sont négligeables. Ce puits déplace une charge d'écran d'environ 0,9 U. A. ; il n'introduit pas d'état lié. Nous verrons au chapitre suivant qu'il correspond approximativement, compte tenu de l'effet de taille, à un atome de cadmium dissous dans l'argent. La figure 3 montre que la charge d'écran ne déborde pratiquement pas du puits car l'aire totale comprise sous la courbe jusqu'au niveau de Fermi est nulle à la précision des calculs soit à deux ou trois centièmes d'unités de charge près.

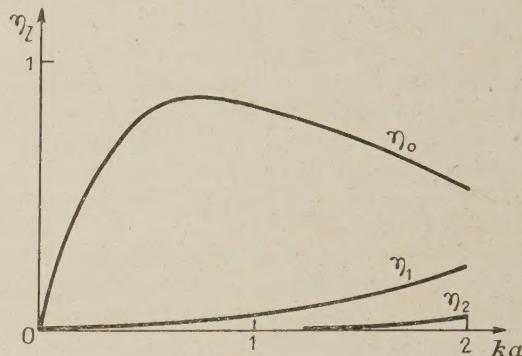


Fig. 2. — Déphasages introduits par le potentiel en puits carré caractérisé par $k.a = 1{,}4$.

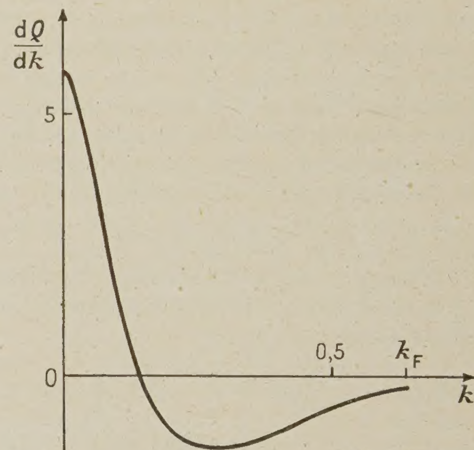


Fig. 3. — Répartition de la charge d'écran Q extérieure au puits de potentiel.

A l'intérieur du puits, c'est-à-dire pour $r < a$, chaque fonction f_l de la formule (10) est remplacée par $A_l\,j_l(k'r)$. Les constantes A_e sont déterminées par les conditions aux limites sur la sphère $r = a$:

$$A_l\,j_l(k'a) = f_l(ka). \quad (15)$$

Les déphasages autres que η_0, η_1 et η_2 étant pratiquement nuls, on a, à l'intérieur de cette sphère :

$$\frac{\delta\rho(E, r)}{\rho(E)} = \sum_{l=0,1,2} (2l + 1)\,A_l^2\,j_l^2(k'r) - 1. \quad (16)$$

La figure 4 montre comment $\delta\rho/\rho$ varie en fonction de r au niveau de Fermi. La densité de l'écran à l'origine est finie, contrairement à ce que donnait la méthode de Thomas-Fermi. Pour $k_F\,r = 3{,}5$, ce qui correspond sensiblement à la distance entre noyaux voisins dans l'argent, on observe une dimi-

nution de la densité des électrons au niveau de Fermi. Nous verrons que ceci explique la diminution du déplacement de Knight de l'argent quand on y dissout du cadmium.

Les électrons contribuent à la formation de l'écran dans un rapport variable suivant leur énergie et la distance au centre diffuseur. A l'origine, seules les composantes sphériques de type s ont une amplitude non nulle ; l'égalité (16) s'y réduit simplement à :

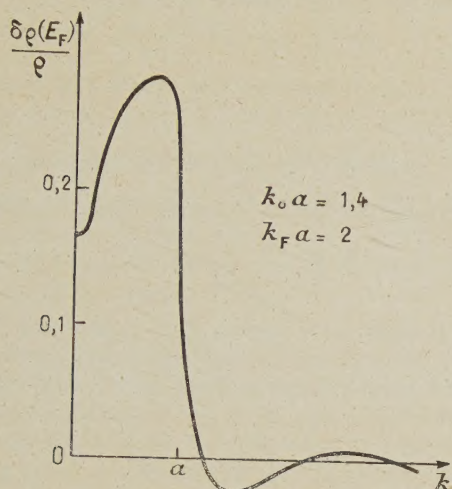


FIG. 4. — Variation relative de densité électronique. au niveau de Fermi.

$$\frac{\delta\rho(E,\,0)}{\rho(E)} = A_0^2(k') - 1.$$

Les équations (14) et les identités :

$$j_0(x) = \sin x/x \qquad n_0(x) = -\cos x/x$$

permettent de lui donner la forme simple suivante :

$$\frac{\delta\rho(E,\,0)}{\rho(E)} = \frac{1}{1 - \left(\frac{k_0\,a}{k'a}\right)^2 \sin^2 k'a} - 1. \qquad (17)$$

La figure 5 représente les variations de $\delta\rho/\rho$ à l'origine en fonction de k. On constate que les électrons de faible énergie contribuent à former l'écran d'une façon relativement très forte par rapport à ceux qui sont proches du niveau de Fermi. En ce qui concerne les contributions absolues, les proportions sont modifiées du fait que la densité des états par unité de k :

$$g\,\frac{dE}{dk} = \frac{k^2}{\pi^2}$$

croît de zéro pour les électrons d'énergie nulle à $2E_F/\pi^2$ au niveau de Fermi. La figure 6 montre qu'à une distance du centre égale à une unité atomique la situation est très voisine de ce qu'elle est à l'origine. Ceci tient à deux faits : d'une part les composantes s des fonctions d'onde varient très peu pour les petites valeurs de r, puisqu'elles ont la forme $\frac{\sin k'r}{r}$; d'autre part les déphasages d'ordre

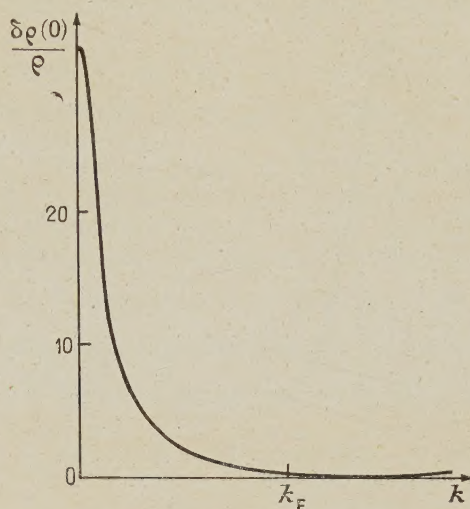


FIG. 5. — Accroissement relatif de densité au centre du puits carré.

$l > 0$ ne commencent à devenir importants qu'au voisinage du niveau de Fermi, comme le montre la figure 2.

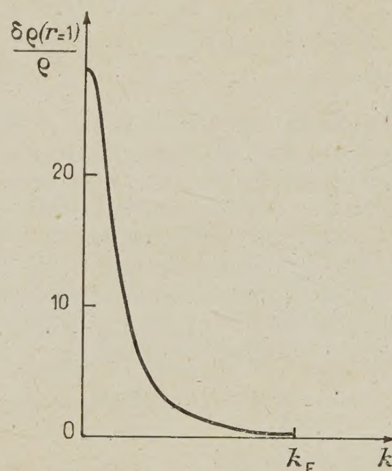


FIG. 6. — Variation relative de densité. en un point intérieur au puits, près du centre ($r = 1$).

En un point extérieur à la sphère du rayon a, l'étude de la structure de l'écran se fait au moyen de la formule (11) dans laquelle on fait varier k en maintenant r constant ; dans cette formule, les déphasages dépendent de k comme l'indique la

figure 2. La figure 7 montre ce que l'on obtient à la distance r définie par $k_F\, r = 3{,}5$. Les électrons de faible énergie sont attirés par le puits de potentiel ($\delta\rho/\rho > 0$), tandis qu'on observe une légère

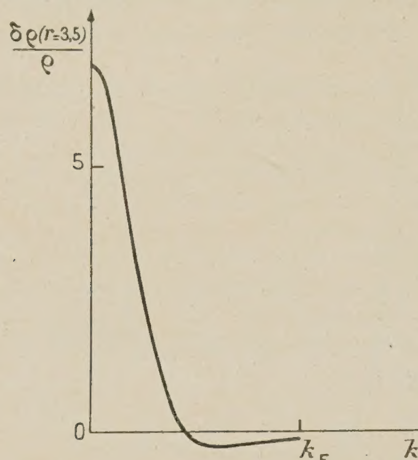


Fig. 7. — Variation relative de densité en un point extérieur au puits ($r = 3{,}5$).

répulsion ($\delta\rho/\rho < 0$) des électrons d'énergie voisine du niveau de Fermi. Ce dernier résultat traduit directement la diminution de densité des électrons au niveau de Fermi à cette distance, que montre la figure 4.

5. **Choix du potentiel diffuseur.** — Les servitudes du calcul obligent à choisir pour V_P la forme de potentiel la plus simple qui satisfasse aux conditions physiques du problème particulier que l'on veut traiter.

A) Considérations générales. — Supposons que les électrons de conductibilité du métal A pur se comportent comme des électrons libres dont la fonction d'onde soit simplement modulée par celle du bas de la bande de conductibilité. Autrement dit admettons que la surface de Fermi soit sphérique et que la masse effective des électrons soit égale à leur masse normale. Dans ces conditions, la fonction de Bloch d'un électron d'énergie

$$E = E_A + \frac{1}{2} k^2$$

dans le métal A s'écrit :

$$\Psi_A(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} u_A(\boldsymbol{r})\, e^{i\mathbf{k}.\mathbf{r}}. \qquad (18)$$

La fonction $u_A(\boldsymbol{r})$ a la périodicité du réseau cristallin du métal A ; elle est solution de l'équation de Schrödinger :

$$\Delta u_A + 2(E_A - V_A)\, u_A = 0 \qquad (19)$$

pour le potentiel du réseau V_A et l'énergie E_A d'un électron au bas de la bande de conductibilité dans le métal A. La normalisation de Ψ_A dans le volume V du métal implique que u_A soit normalisée dans l'unité de volume.

Si on pose :

$$\Psi_A(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}) = u_A(\boldsymbol{r})\, \psi^0_{\mathbf{k}}(\boldsymbol{r}),$$

l'équation de Schrödinger :

$$\Delta\Psi_A + 2(E - V_A)\, \Psi_A = 0$$

montre, compte tenu de l'équation (19) pour u_A, que $\psi_{\mathbf{k}}$ doit satisfaire à :

$$u_A[\Delta\psi^0_{\mathbf{k}} + k^2\, \psi^0_{\mathbf{k}}] + 2\Delta u_A . \Delta\psi^0_{\mathbf{k}} = 0. \qquad (20)$$

Prendre pour Ψ_A la fonction (18), c'est-à-dire

$$\psi^0_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{V}}\, e^{i\mathbf{k}.\mathbf{r}},$$

revient à négliger le terme $\Delta u_A . \Delta\psi^0_{\mathbf{k}}$ dans l'équation (20). Nous discutons cette approximation dans l'annexe I ; elle se justifie dans une certaine mesure car, dans les métaux purs, les fonctions d'ondes de bas de bande ne présentent d'oscillations que dans un volume limité autour des noyaux, tandis qu'elles sont très constantes au delà, en raison des conditions imposées à la surface des polyèdres atomiques par la périodicité du réseau [1], [12]. De plus, l'amplitude de la fonction de bas de bande, dans la région où elle est pratiquement constante, ne diffère pas beaucoup de celle qu'aurait un électron libre uniformément réparti dans le volume atomique. Ces remarques vont nous guider dans la détermination du potentiel diffuseur.

B) Cas d'une impureté de substitution. — Considérons un premier type de problème, celui où l'on étudie les modifications de densité électronique produites dans un métal A monovalent dont on a remplacé un atome par un atome de métal B de valence $Z + 1$.

On sait que, dans un alliage $\mathbf{A}B$ à faible concentration de métal B, l'écran électronique est très concentré autour des atomes B dissous et ne s'étend guère au delà des polyèdres atomiques correspondants [1], [2]. Le calcul de la quantité Q au paragraphe précédent le montre d'ailleurs sur un modèle particulièrement simple. La forme de la fonction de bas de bande dans la matrice n'est donc pas beaucoup modifiée par la présence du soluté.

Considérons alors un réseau analogue à celui de la matrice, mais dont le potentiel périodique serait engendré par la répétition de celui que subissent les électrons de conductibilité de l'alliage dans le polyèdre atomique de l'atome B dissous. Dans ce potentiel périodique V_B, un électron aurait, au bas de la bande de conductibilité, l'énergie E_B et la fonction périodique u_B solution de l'équation de Schrödinger correspondante :

$$\Delta u_B + 2(E_B - V_B)\, u_B = 0. \qquad (21)$$

Les conditions aux limites imposées par la périodicité du réseau obligent la fonction u_B à avoir un gradient nul sur la surface du polyèdre atomique. Comme u_A dans la matrice, elle est donc assez constante dans la majeure partie du volume atomique de B ; ses oscillations ne deviennent importantes qu'au voisinage immédiat du noyau B.

Considérons maintenant l'alliage formé d'un atome B dissous dans la matrice A. On sait qu'à dilution infinie le niveau de Fermi de l'alliage reste celui du métal A pur [2]. Soit Ψ la fonction d'onde d'un électron d'énergie $E = E_A + \frac{1}{2} k^2$ dans l'alliage. Suivant la méthode de Wigner-Seitz, remplaçons le polyèdre atomique de l'atome B dissous par une sphère de même volume. Soit a le rayon de cette sphère. Posons :

$$\Psi = u_A \, \psi_{\mathbf{k}} \quad \text{pour} \quad r > a, \tag{22}$$

l'origine des coordonnées étant prise au noyau B. D'après ce que nous avons dit plus haut, le potentiel perturbateur dû à l'atome B est pratiquement nul pour $r > a$. Par conséquent, dans les conditions de validité de l'expression (18), la fonction $\psi_{\mathbf{k}}$ satisfait à l'équation de Schrodinger pour les électrons libres :

$$\Delta\psi_{\mathbf{k}} + k^2 \, \psi_{\mathbf{k}} = 0 \quad \text{pour} \quad r > a. \tag{23}$$

Posons maintenant, à l'intérieur de la sphère atomique de B :

$$\Psi = u_B \, \psi_{\mathbf{k}} \qquad (r < a). \tag{24}$$

La fonction u_B étant solution de l'équation (21), nous trouvons que dans cette sphère $\psi_{\mathbf{k}}$ doit vérifier l'équation suivante :

$$u_B \left\{ \Delta\psi_{\mathbf{k}} + [k^2 + 2(E_A - E_B)] \, \psi_{\mathbf{k}} \right\} + 2\Delta\psi_{\mathbf{k}} . \Delta u_B = 0. \tag{25}$$

Ce que nous avons vu précédemment au sujet des fonctions de bas de bande des métaux purs indique que ∇u_B est pratiquement nul quand la distance r au noyau dépasse une unité atomique environ. Dans ce domaine, nous pouvons donc négliger le produit $\nabla\psi_{\mathbf{k}} . \Delta u_B$ de l'équation (25) pourvu que la fonction $\psi_{\mathbf{k}}$ ne varie pas trop vite. Par contre, au voisinage immédiat du noyau B, où la composante s de $\psi_{\mathbf{k}}$ est la plus importante, c'est le facteur $\nabla\psi_{\mathbf{k}}$ qui s'annule. En effet, pour les petites valeurs de r, l'équation (24) admet, si l'on néglige le produit $\nabla\psi_{\mathbf{k}} \, \nabla u_B$, la solution :

$$\psi_k \simeq \frac{\sin \sqrt{k^2 + 2(E_A - E_B)} . r}{r},$$

régulière à l'origine et pour laquelle $\nabla\psi_{\mathbf{k}}(0) = 0$. Nous pouvons donc, avec une bonne approximation prendre pour $\psi_{\mathbf{k}}$ les solutions de l'équation :

$$\Delta\psi_{\mathbf{k}} + (k^2 + k_0^2) \, \psi_{\mathbf{k}} = 0 \quad \text{pour} \quad r < a, \tag{26}$$

en posant :

$$2(E_A - E_B) = k_0^2.$$

Les équations (23) et (26) montrent que la fonction d'onde $\psi_{\mathbf{k}}$ est celle d'un électron libre d'énergie $\frac{1}{2} k^2$ et d'impulsion $\mathbf{k}$, diffusé par un puits de potentiel de rayon a et de profondeur $\frac{1}{2} k_0^2$ (*fig.* 1). Nous discutons cette approximation plus en détail dans l'annexe I.

Les fonctions d'onde u_A et u_B normalisées dans l'unité de volume n'ont pas, en général, strictement la même valeur pour $r = a$. La continuité de la fonction d'onde totale sur la sphère atomique :

$$u_A(a) \, \psi_{\mathbf{k}}(a + 0) = u_B(a) \, \psi_{\mathbf{k}}(a - 0)$$

entraîne alors une discontinuité de la fonction $\psi_{\mathbf{k}}$. La continuité en a de la dérivée de la fonction d'onde totale impose la même discontinuité pour les dérivées de $\psi_{\mathbf{k}}$ de part et d'autre de la surface de la sphère :

$$u_A(a) \left(\frac{\mathrm{d}\psi_{\mathbf{k}}}{\mathrm{d}r}\right)_{r=a+0} = u_B(a) \left(\frac{\mathrm{d}\psi_{\mathbf{k}}}{\mathrm{d}r}\right)_{r=a-0}$$

car :

$$\left(\frac{\mathrm{d}u_A}{\mathrm{d}r}\right)_{r=a} = \left(\frac{\mathrm{d}u_B}{\mathrm{d}r}\right)_{r=a} = 0.$$

Par conséquent, la dérivée logarithmique de $\psi_{\mathbf{k}}$ est continue en a. Dans ces conditions, les déphasages créés par le puits de potentiel dans les composantes sphériques de $\psi_{\mathbf{k}}$ sont les mêmes que pour une fonction d'onde d'électron libre de même énergie satisfaisant aux conditions habituelles de continuité pour $r = a$. La fonction $\psi_{\mathbf{k}}$ est simplement multipliée par le facteur $\frac{u_A(a)}{u_B(a)}$ pour $r < a$. Ce facteur étant très voisin de l'unité, nous ne tiendrons pas compte de cette petite correction.

La détermination précise de l'énergie de bas de bande E_A d'un métal est très difficile ; quant au calcul direct de E_B, il semble à peu près impossible. Cependant, on peut déterminer k_0 de la façon simple suivante. En effet, on sait que si l'atome B dissous dans le métal monovalent A a la valence $Z + 1$, les électrons de conductibilité de l'alliage ainsi formé se polarisent autour de B de façon à faire écran à sa charge positive excédentaire Z. Quand le puits de potentiel a la profondeur $\frac{1}{2} k_0^2$ convenable, les déphasages η_l qu'il introduit dans les composantes sphériques de la fonction d'onde d'un électron au niveau de Fermi satisfont à la condition de Friedel [2] :

$$Z = \frac{2}{\pi} \sum_l (2l + 1) \, \eta_l(k_F). \tag{27}$$

Cette condition assure que la charge d'écran déplacée dans le gaz d'électrons par la perturbation est bien égale à Z, comme l'exige l'équilibre électrostatique du métal. En calculant les déphasages au niveau de Fermi à l'aide des formules (14), il est donc facile de déterminer k_0 par approximations successives.

Lorsque les métaux A et B ont des volumes atomiques différents, on peut en tenir compte suivant le procédé utilisé avec succès par Blatt pour calculer la résistivité résiduelle du cuivre ou de l'argent contenant de petites quantités d'atomes étrangers dissous [13]. La méthode de Blatt aboutit à remplacer dans la formule (27) la charge d'écran Z par une charge effective Z' plus grande ou plus petite que Z selon que l'atome B est plus petit ou plus gros qu'un atome A.

C) Cas d'une impureté ponctuelle en position interstitielle. — Dans le cas où l'on étudie la densité électronique sur une particule ponctuelle de charge positive (positon ou muon par exemple), introduite dans un métal, il semble raisonnable de prendre un potentiel coulombien avec écran de la forme :

$$V_P = \frac{Z}{r} e^{-\lambda r} \tag{28}$$

si Z est la charge de la particule. En effet, au voisinage de l'origine, où l'effet d'écran devient négligeable, ce potentiel se comporte correctement en Z/r. Aux distance plus grandes, il a la forme requise par l'approximation de Thomas-Fermi. Cependant, le paramètre d'écran λ doit être déterminé de façon que les déphasages au niveau de Fermi, calculés en résolvant l'équation de Schrödinger pour ce potentiel, vérifient la relation de Friedel (27).

Si on prend des fonctions d'ondes non perturbées de la forme (18), les fonctions d'ondes perturbées correspondantes s'écriront dans ce cas :

$$\Psi(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}) = u_A \, \psi_{\mathbf{k}}(\boldsymbol{r}),$$

l'équation d'onde pour les fonctions $\psi_{\mathbf{k}}$ étant :

$$u_A \left[\Delta\psi_k + \left(k^2 + \frac{2Z}{r} e^{-\lambda r}\right) \psi_{\mathbf{k}}\right] + 2\nabla u_A . \nabla \psi^{\mathbf{k}} = 0. \tag{29}$$

Chaque fonction $\psi_{\mathbf{k}}$ peut être considérée comme la superposition d'une onde plane incidente et d'une ondelette diffusée, conformément à la formule (8), si on néglige le terme $\nabla u_A \nabla \psi_k^d$ dans le métal pur. Dans ces conditions, le terme $\Delta u_A \Delta \psi_k^d$ qui apparaît dans l'équation (29) est aussi négligeable. En effet, l'amplitude de l'ondelette diffusée ψ_k^d n'est importante que pour r inférieur à $1/\lambda$, c'est-à-dire de l'ordre de l'unité atomique, donc dans une région où ∇u_A est pratiquement nul. La raison en est que les particules chargées positivement sont repoussées par les noyaux ; elle est donc tendance à se localiser dans les régions interstielles où les fonctions d'onde des électrons de conductibilité sont assez proches de celles d'électrons libres. Dans ces conditions, l'équation (29) pour $\psi_{\mathbf{k}}$ se réduit à celle de la diffusion d'électrons libres pour un potentiel coulombien avec écran :

$$\Delta\psi_{\mathbf{k}} + \left(k^2 + \frac{2Z}{r} e^{-\lambda r}\right) \psi_{\mathbf{k}} = 0. \tag{30}$$

6. **Conclusion.** — L'étude théorique qui précède nous a donné les résultats suivants :

1° La perturbation d'un gaz d'électrons libres par un potentiel central à portée, même très courte, produit dans le gaz des variations de densité d'allure oscillante en fonction de la distance au centre diffuseur. Pour les électrons d'un intervalle étroit d'énergie, l'amplitude de ces variations décroît seulement comme l'inverse du carré de la distance. Par conséquent, la perturbation des électrons de conductibilité d'un métal pourra se manifester à grande distance par des effets sensibles aux variations locales de densité.

2° La charge d'écran est presque toute concentrée dans le volume où le potentiel est important. A l'extérieur de celui-ci, l'intégrale des variations de charge est très petite ; mais les changements locaux de densité électronique peuvent ne pas être de moyenne nulle si on les considère seulement en des points particuliers, tels que les noyaux des atomes dans un cristal, comme c'est le cas en résonance nucléaire.

3° On pourra, avec une bonne approximation, traiter les électrons de conductibilité d'un métal comme des électrons libres en prenant un potentiel diffuseur de la forme (28) si la perturbation est produite par une impureté ponctuelle chargée positivement : positon, muon. S'il s'agit d'une impureté de substitution telle qu'un atome dissous, formant un alliage infiniment dilué, il sera meilleur d'introduire un puits de potentiel de rayon égal au rayon de l'atome dissous et de profondeur telle que la condition d'écran soit satisfaite.

Dans la deuxième partie de cet article et dans l'article suivant nous appliquons ces résultats au traitement de problèmes physiques réels.

DEUXIÈME PARTIE

DÉPLACEMENT DE KNIGHT DANS LES ALLIAGES

1. **Introduction.** — Dans un métal pur, la résonance magnétique nucléaire d'un isotope est déplacée vers les fréquences élevées par rapport à celle qu'on observe pour le même métal dans un sel [5] [1]. Le déplacement relatif de fréquence :

[1] Récemment, Rowland a observé un effet Knight négatif sur le platine [14].

$K = \Delta\nu/\nu$ est de l'ordre de 0,1 à 1 %. Il est dû au paramagnétisme de Pauli des électrons de conductibilité [15]. Au niveau de Fermi du métal, ces électrons s'orientent dans le champ magnétique statique H appliqué à l'échantillon ; l'interaction de contact de leurs moments magnétiques avec ceux des noyaux équivaut à un accroissement local ΔH du champ magnétique tel que :

$$K = \frac{\Delta H}{H} = \frac{8\pi}{3} \chi V < |\Psi_F(0)|^2 >. \qquad (31)$$

Dans cette formule, χ désigne la susceptibilité paramagnétique de Pauli par unité de volume du métal ; on sait qu'elle est proportionnelle à la densité $g(E_F)$ des états au niveau de Fermi, par unité de volume et unité d'énergie [4] ; $< |\Psi_F(0)|^2 >$ est la valeur moyenne, par état, de la densité électronique au noyau pour les états d'un petit intervalle d'énergie à la surface de Fermi, les fonctions d'onde Ψ_F étant normalisées dans le volume V du métal.

Dans un alliage **AB**, la densité des états au niveau de Fermi varie avec la concentration. De même, les fonctions d'onde Ψ_F se modifient tant aux noyaux A qu'aux noyaux B. A eux seuls, ces deux effets doivent suffire à modifier les déplacements de Knight respectifs des noyaux A et B. Poutant, les premières expériences faites sur des alliages semblaient indiquer que le déplacement de Knight de la matrice était peu sensible à la présence du soluté jusqu'à des concentrations pouvant dépasser 10 % [5], [16], [17]. Ces expériences n'étaient peut être pas assez précises pour révéler de petites variations systématiques du déplacement de Knight ; ces variations devaient être masquées par de forts élargissements quadrupolaires dans des alliages tels que **Cu** Zn, **Cu** Al, **Al** Cu, **Al** Mg et **Al** Zn dont les constituants portent des spins nucléaires 3/2 ou 5/2. De son côté, la résonance du soluté semblait aussi peu sensible à la concentration bien qu'elle eût lieu à une fréquence différente de celle du métal B pur.

L'absence de variation du déplacement de Knight de la matrice pouvait s'expliquer dans l'approximation de Thomas-Fermi étendue au cas d'une concentration non nulle d'atomes dissous [2], [18]. On peut d'ailleurs s'en rendre compte au moyen de la formule (6).

Cependant, les mesures systématiques de Drain sur les alliages argent-cadmium révèlent une diminution du déplacement de Knight de l'argent, linéaire en fonction de la concentration en cadmium [19]. De plus, le déplacement de Knight du cadmium dissous diminue lui aussi, suivant la même loi. La linéarité se conserve pratiquement dans tout le domaine de stabilité de la phase α (C. F. C.) à la température ordinaire, soit jusqu'à plus de 40 % de cadmium dissous. Ces résultats sont confirmés et étendus, en ce qui concerne l'argent, par les mesures de Rowland sur les alliages **Ag** Au, **Ag** Cd, **Ag** In, **Ag** Sn et **Ag** Sb [20]. Enfin, Bloembergen et Rimaï dans des alliages alcalins liquides [21], Oriani et Webb [22] dans **Na** Hg et **Na** Au observent également une variation du déplacement de Knight du solvant proportionnelle à la concentration tant que celle-ci reste assez faible.

La raie de résonance du solvant s'élargit considérablement dans les alliages, mais l'élargissement croît nettement moins vite que la concentration. Dans la série des alliages d'argent, la variation du déplacement de Knight et l'élargissement de la raie de l'argent augmentent quand on passe de l'or à l'antimoine, c'est-à-dire à mesure que la valence du soluté croît. L'intérêt de l'argent vient de ce que ses isotopes magnétiques ont un spin nucléaire 1/2, donc ne présentent pas de moment quadrupolaire.

Ces effets ne s'expliquent pas dans l'approximation de Thomas-Fermi. Ils sont beaucoup trop forts pour être dus simplement à la distorsion de la matrice par des atomes dissous de volume différent. (Cf. annexe II.) Ils varient de façon trop régulière avec la concentration pour être attribués à des changements de caractère s-p des fonctions d'onde au voisinage d'une limite de zone de Brillouin [23]. Nous en proposons au contraire l'explication suivante : la variation du déplacement de Knight avec la concentration et l'élargissement de la résonance sont des conséquences des fluctuations de densité électroniques dues à la polarisation des électrons de conductibilité de l'alliage par les atomes dissous [24], [25].

Dans la première partie, nous avons montré l'existence de ces fluctuations dans un gaz d'électrons libres perturbé. Nous allons maintenant développer le calcul qui doit justifier notre interprétation. Nous commencerons par le cas d'un seul atome dissous dans un métal monovalent, puis nous passerons au cas réel d'une concentration faible mais non nulle de soluté. Après avoir calculé la variation du déplacement de Knight et l'élargissement des raies pour une solution solide, nous étendrons la théorie aux alliages liquides.

2. **Effet d'un atome dissous sur la résonance nucléaire de la matrice.** — Nous allons montrer que la présence d'une impureté polyvalente B dans un métal monovalent A entraîne un étalement de la fréquence de résonance nucléaire de la matrice. Pour simplifier les calculs, tout en dégageant l'essentiel du phénomène, nous supposons que les électrons du niveau de Fermi se comportent dans le métal A pur comme des électrons libres dont la fonction d'onde serait modulée par celle du bas de la bande de conductibilité. Nous avons vu que, dans ces conditions, la présence de l'atome B en position de substitution peut se représenter par un puits de potentiel dont nous avons déterminé les caractéristiques au paragraphe 5 de la première

partie. Nous conservons les mêmes notations, à ceci près que, puisque seuls les électrons au niveau de Fermi de l'alliage nous intéressent pour l'étude du déplacement de Knight, nous omettons provisoirement l'indice F qui les caractérisait ; nous désignons simplement par k le rayon de la sphère de Fermi.

A la fonction d'onde d'un électron de vecteur d'onde $\boldsymbol{k}$ dans le métal A pur,

$$\Psi_A(\boldsymbol{r}) = u_A(\boldsymbol{r})\ \psi_{\mathbf{k}}^0(\boldsymbol{r}), \tag{32}$$

où

$$\psi_{\mathbf{k}}^0 = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k}.\mathbf{r}},$$

nous avons fait correspondre, dans l'alliage, la fonction d'onde de l'électron diffusé par l'atome B :

$$\Psi(\boldsymbol{r}) = u_A(\boldsymbol{r})\ \psi_{\mathbf{k}}(\boldsymbol{r}). \tag{22}$$

Soit ϖ la densité des états par unité de volume dans l'espace des $\boldsymbol{k}$, au voisinage de la sphère de Fermi. Au niveau de Fermi du métal A pur, la densité électronique par unité de volume et unité d'énergie est :

$$\rho(\boldsymbol{r}) = V \int^{4\pi} k\varpi\, u_A^*\, u_A\, \psi_{\mathbf{k}}^{0*}\, \psi_{\mathbf{k}}^0\, \mathrm{d}\Omega,$$
$$= g u_A^*(\boldsymbol{r})\, u_A(\boldsymbol{r}),$$

$g = 4\pi\, k\, \varpi$ étant le nombre d'électrons par unité d'énergie et unité de volume au niveau de Fermi, et $\mathrm{d}\Omega$ l'élément d'angle solide dans l'espace réciproque.

Dans l'alliage, au point correspondant de la matrice, la densité électronique est devenue :

$$\rho(\boldsymbol{r}) + \delta\rho(\boldsymbol{r}) = V \int_0^{4\pi} k\, \varpi\, u_A^*\, u_A\, \psi_{\mathbf{k}}^{0*}\, \psi_{\mathbf{k}}\, \mathrm{d}\,\Omega$$
$$= V \frac{g u_A^*\, u_A}{4\pi} \int_0^{4\pi} \psi_{\mathbf{k}}^*\, \psi_{\mathbf{k}}\, \mathrm{d}\Omega.$$

L'accroissement relatif de densité au point $\boldsymbol{r}$ vaut donc :

$$\frac{\delta\rho(\boldsymbol{r})}{\rho(\boldsymbol{r})} = \frac{V}{4\,\pi} \int^{4\pi} (\psi_{\mathbf{k}}^*\, \psi_{\mathbf{k}} - \psi_{\mathbf{k}}^{0*}\, \psi_{\mathbf{k}}^0)\, \mathrm{d}\Omega. \tag{33}$$

Puisque u_A est normalisée dans l'unité de volume, les fonctions $\psi_{\mathbf{k}}$ et $\psi_{\mathbf{k}}^0$ de l'expression (33) sont identiques à celles de la formule (9). Par conséquent nous obtenons pour $\delta\rho/\rho$ exactement le même résultat que dans la relation (11) :

$$\frac{\delta\rho(\boldsymbol{r})}{\rho(\boldsymbol{r})} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)$$
$$\left\{ [n_l^2(kr) - j_l^2(kr)] \sin^2 \eta_l - j_l(kr)\, n_l(kr) \sin 2\eta_l \right\}. \tag{34}$$

Soit $\boldsymbol{R}_j$ le rayon vecteur du $j^{\text{ème}}$ noyau A à partir du noyau B. Dans le métal A pur, la densité $\rho(\boldsymbol{R}_j)$ a la même valeur ρ pour tous les noyaux. Dans l'alliage, cette densité devient :

$$\rho(\boldsymbol{R}_j) = \rho + \delta\rho(\boldsymbol{R}_j)$$

et varie d'un noyau à l'autre suivant la relation (33). D'après la formule (31), le déplacement de Knight K est proportionnel à la densité électronique au noyau : $\rho(\boldsymbol{R}_j) \sim \langle |\Psi(\boldsymbol{R}_j)|^2 \rangle$. Les variations de $\rho(\boldsymbol{R}_j)$ dans l'alliage font que chaque noyau A y a sa fréquence de résonance particulière, donc son propre déplacement de Knight : $K_j = K + \delta K_j$. La variation relative $\delta K_j/K$ du déplacement de Knight du $j^{\text{ème}}$ noyau A est égale à celle de la densité électronique au même noyau :

$$\delta K_j/K = \delta\rho(\boldsymbol{R}_j)/\rho. \tag{53}$$

Par conséquent, au lieu d'une fréquence de résonance unique (en supposant pour simplifier que le métal A ne comporte qu'un seul isotope), on obtient, en principe, dans l'alliage, tout un spectre de fréquences de résonance voisines.

Nous avons calculé l'effet sur la résonance de l'argent des impuretés suivantes : Cd, In, Sn et Sb. Nous avons utilisé pour cela les déphasages que Blatt avait calculés pour l'étude de la résistivité résiduelle des alliages correspondants [13]. Nous reproduisons ces déphasages dans le tableau I, avec les charges effectives Z' qui tiennent compte de l'effet de taille, en limitant leurs valeurs aux décimales que nous avons effectivement utilisées.

TABLEAU I

Charges effectives Z' et déphasages dans l'argent (d'après [13])

	Atomes dissous			
Déphasages	Cd $Z = 1$, $Z' = 0{,}889$	In $Z = 2$, $Z' = 1{,}83$	Sn $Z = 3$, $Z' = 2{,}76$	Sb $Z = 4$, $Z' = 3{,}67$
η_0	0,532	0,830	1,00	1,11
η_1	0,241	0,558	0,908	1,215
η_2	0,028	0,063	0,109	0,178
η_3	0,002	0,004	0,006	0,010

Pratiquement, comme le montre ce tableau, ils deviennent négligeables au delà de $l = 2$ ou 3, ce qui limite la somme (34).

La figure 8 illustre les résultats. On remarque que la polarisation des électrons par l'atome B affecte fortement la fréquence de résonance des

noyaux A qui sont ses premiers et seconds voisins. On voit qu'elle crée dans les couches d'atomes plus éloignées des fluctuations d'autant plus grandes que la charge Z est plus élevée : l'effet va en s'accentuant quand on passe du cadmium ($Z = 1$) à l'antimoine ($Z = 4$). De part et d'autre d'une raie centrale intense, et quelque peu élargie, correspondant aux noyaux A éloignés, on devrait, en principe, observer des raies satellites dues aux fréquences de résonances différentes des couches d'atomes A voisines de l'impureté. Naturellement, même aux concentrations les plus faibles qui donnent un signal observable en pratique, les raies sont élargies du fait qu'on a alors un grand nombre

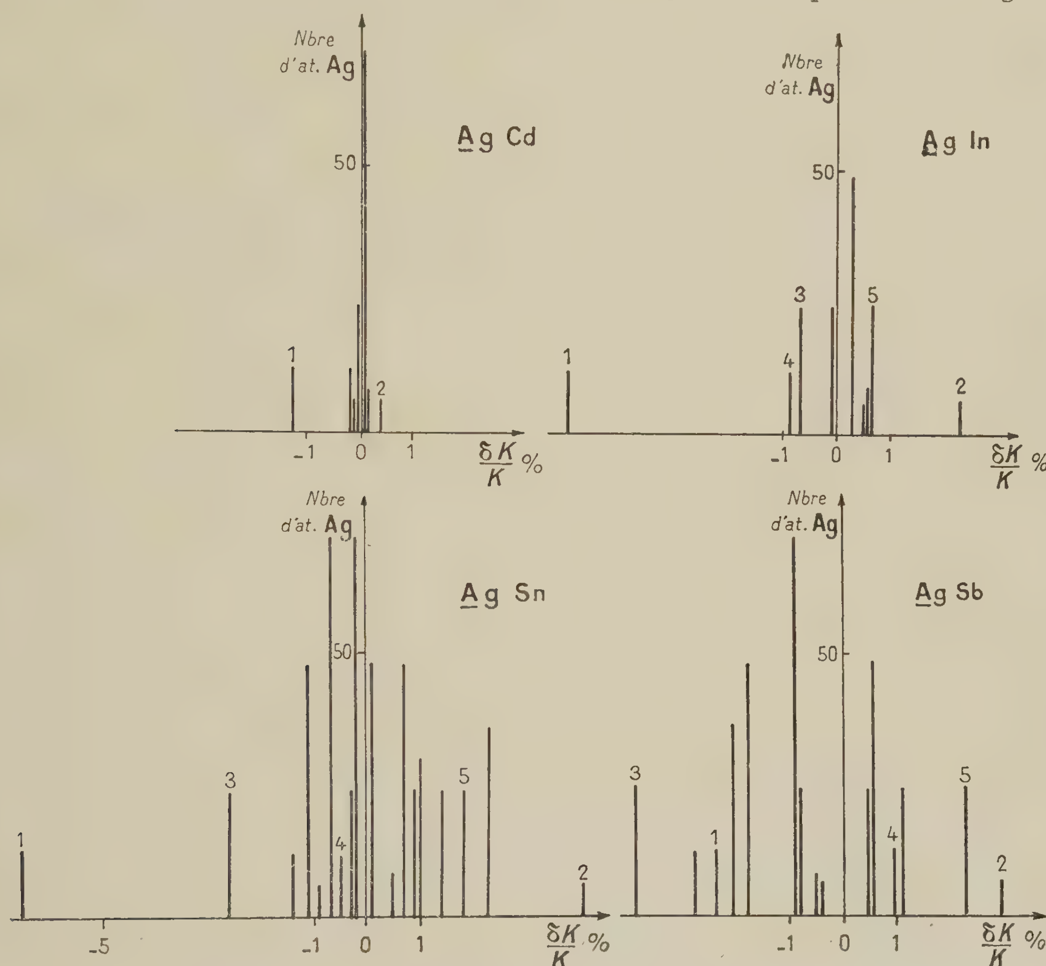


Fig. 8. — Premières raies satellites de la résonance de l'argent dans **Ag** Cd, **Ag** In, **Ag** Sn et **Ag** Sb infiniment dilués.

d'atomes B dissous répartis de façon aléatoire dans l'alliage. Dans ces conditions, chaque atome A est le voisin éloigné de plusieurs atomes B. On peut cependant espérer distinguer les raies satellites des premières couches voisines des atomes B. Les observations de Rowland semblent confirmer ce point [20].

3. **Calcul du déplacement de Knight moyen.** — Nous considérons maintenant un alliage de substitution **AB**, parfaitement désordonné, dans lequel la concentration c des atomes B est faible, mais non plus infiniment petite. Nous admettons de plus que les diffusions multiples des électrons au niveau de Fermi de l'alliage par les atomes B sont négligeables. Nous indiquons, comme au paragraphe précédent, par R_j la position du $j^{\text{ème}}$ noyau A à partir d'un noyau B pris comme origine et nous affectons de même un indice i aux atomes B.

A la fonction de Bloch (32) du métal A pur correspond maintenant dans la matrice de l'alliage, la fonction :

$$\Psi(\boldsymbol{r}) = u_A(\boldsymbol{r})\, \psi'_{\mathbf{k}}(\boldsymbol{r})$$

où :

$$\psi'_{\mathbf{k}}(\boldsymbol{r}) = \psi_{\mathbf{k}}(\boldsymbol{r}) + \sum_{i=l}^{n} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}_i}[\psi_{\mathbf{k}}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}_i) - \psi^0_{\mathbf{k}}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}_i)] \quad (36)$$

est la fonction d'onde d'un électron libre d'impulsion $\boldsymbol{k}$ diffusé par les n puits de potentiel corres-

pondant aux n atomes B. Un calcul tout à fait analogue à celui du paragraphe précédent montre que la variation relative $\delta\rho'(\boldsymbol{R}_j)/\rho$ de la densité électronique au $j^{\text{ème}}$ noyau A des électrons du niveau de Fermi est maintenant :

$$\frac{\delta\rho'(\boldsymbol{R}_j)}{\rho} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} [\psi'^*_{\mathbf{k}}(\boldsymbol{R}_j)\, \psi'_{\mathbf{k}}(\boldsymbol{R}_j) - \psi^{0*}_{\mathbf{k}}(\boldsymbol{R}_j)\, \psi^0_{\mathbf{k}}(\boldsymbol{R}_j)]\, \mathrm{d}\Omega. \quad (37)$$

Ce qui détermine le déplacement relatif $\overline{\delta K}/K$ du centre de la raie de résonance, c'est la valeur moyenne $\overline{\delta\rho}/\rho$ de la variation relative de densité électronique sur les N noyaux A de l'alliage :

$$\frac{\overline{\delta K}}{K} = \frac{\overline{\delta\rho}}{\rho} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{\delta\rho'(\boldsymbol{R}_j)}{\rho}. \quad (38)$$

Posons, pour simplifier l'écriture :

$$\psi_{\mathbf{k}}(\boldsymbol{r}) - \psi^0_{\mathbf{k}}(\boldsymbol{r}) = F_{\mathbf{k}}(\boldsymbol{r}). \quad (39)$$

Dans un alliage parfaitement désordonné, tous les atomes B sont statistiquement équivalents. Dans ces conditions, l'équation (38) devient, après sommation sur tous les atomes B :

$$\frac{\overline{\delta\rho}}{\rho} = \frac{n}{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{\delta\rho(\boldsymbol{R}_j)}{\rho(\boldsymbol{R}_j)} + \frac{nV}{4\pi N} \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=2}^{n} \int e^{-i\mathbf{k}.\mathbf{R}_i} F_{\mathbf{k}}(\boldsymbol{R}_j - \boldsymbol{R}_i)\, F_{\mathbf{k}}(\boldsymbol{R}_j)\, \mathrm{d}\Omega. \quad (40)$$

L'alliage étant constitué de N atomes A et de n atomes B répartis de façon tout à fait aléatoire, un nœud du réseau a la probabilité $\dfrac{N}{N+n}$ d'être occupé par un noyau A et la probabilité $c = \dfrac{n}{N+n}$ de l'être par un noyau B ; c est simplement la concentration de l'alliage en atomes B. En transformant l'équation (40) de façon à y mettre la concentration c en évidence, on obtient :

$$\frac{\overline{\delta\rho}}{\rho} = c \sum_{\mathrm{R}\neq 0} \frac{\delta\rho(\boldsymbol{R})}{\rho(\boldsymbol{R})} + \frac{c^2\, V}{4\pi} \int \Big|\sum_{\mathrm{R}\neq 0} \mathrm{e}^{-i\mathbf{k}.\mathbf{R}} F_{\mathbf{k}}(\boldsymbol{R})\Big|^2 \mathrm{d}\Omega. \quad (41)$$

Dans cette expression, les sommes sont maintenant étendues à tous les nœuds du réseau autres que l'origine ; la somme $\sum_{\mathrm{R}\neq 0} \dfrac{\delta\rho(\boldsymbol{R})}{\rho(\boldsymbol{R})}$ se calcule à partir de la formule (34) où l'on remplace $\boldsymbol{r}$ par les vecteurs $\boldsymbol{R}$ du réseau. D'après la définition (39), la fonction $F_{\mathbf{k}}(\boldsymbol{R})$ représente l'amplitude, au nœud de rayon vecteur $\boldsymbol{R}$, de la partie de l'onde $\psi^0_{\mathbf{k}}$ qui a été diffusée par l'atome B situé à l'origine. Dans l'expression (41), le coefficient de c et celui de c^2 doivent être du même ordre de grandeur. Comme les hypothèses de notre calcul supposent en particulier que la concentration c est faible, nous aboutissons au résultat suivant :

$$\frac{\overline{\delta K}}{K} \simeq c \sum_{\mathrm{R}\neq 0} \frac{\delta\rho(\boldsymbol{R})}{\rho(\boldsymbol{R})} \quad (42)$$

valable si $c \ll 1$. Autrement dit : aux concentrations faibles du soluté, le déplacement de Knigth moyen de la matrice varie proportionnellement à cette concentration.

En remplaçant, dans la relation (42), $\dfrac{\delta\rho(\boldsymbol{R})}{\rho(\boldsymbol{R})}$ par sa valeur déduite de la formule (34), on obtient :

$$\frac{1}{c} \frac{\delta K}{K} = \sum_l (\alpha'_l \sin^2 \eta_l + \beta'_l \sin 2\eta_l). \quad (43)$$

Dans cette expression, les coefficients :

$$\left.\begin{aligned} \alpha'_l &= (2l+1) \sum_{\mathrm{R}\neq 0} [n_l^2(kR) - j_l^2(kR)] \\ \text{et :}\quad \beta'_l &= -(2l+1) \sum_{\mathrm{R}\neq 0} j_l(kR)\, \eta_l(kR) \end{aligned}\right\} \quad (44)$$

ne dépendent pratiquement que de la matrice A. En effet, pour des concentrations faibles d'atomes dissous, les distorsions du réseau modifient peu les distances entre noyaux ; on ne commet pas d'erreur sensible en conservant aux noyaux A de l'alliage leurs positions dans la matrice non déformée. L'essentiel de l'effet de taille est inclus dans les déphasages lorsqu'on les calcule en remplaçant la charge Z par la charge effective Z' de Blatt dans la relation de Friedel (27). Dans la mesure où les électrons de conductibilité se comportent comme des électrons libres, le produit kr_A du rayon de la sphère de Fermi par celui de la sphère atomique de la matrice est constant : $kr_A = \left(\dfrac{9\pi}{4}\right)^{1/3}$ pour les métaux monovalents. Par conséquent, les quantités kR ne dépendent que du réseau cristallin du métal A. Quant aux déphasages η_l, ils dépendent essentiellement du soluté, par sa valence $Z+1$, et un peu du solvant, par l'effet de taille.

4. **Comparaison avec les résultats expérimentaux.** — Les principaux résultats actuels portent sur des alliages d'argent [19], [20] et quelques alliages de cuivre [26]. La structure de ces métaux étant cubique à faces centrées, nous avons calculé les coefficients α'_l et β'_l pour un métal monovalent ayant cette structure.

Les fonctions $n_l^2(kR) - j_l^2(kR)$ et $j_l(kR)\, n_l(kR)$ prennent des valeurs oscillantes dont l'amplitude ne décroît que comme l'inverse du carré de la distance R à l'origine. Par conséquent, leurs sommes sur les nœuds éloignés dans la matrice ne s'annulent qu'en moyenne. Pour évaluer numériquement les coefficients α'_l et β'_l, nous avons effectué les sommes sur les N' premiers noyaux voisins de l'atome B pris pour origine, c'est-à-dire, pratiquement, sur

tous les nœuds du réseau de la matrice situés à l'intérieur d'une sphère de rayon $R_1 = \sqrt{(N' + 1)}\, r_A$, sauf l'origine. A l'extérieur de cette sphère, nous avons remplacé les sommes sur les nœuds du réseau par des intégrales de volume. Celles-ci ont respectivement pour valeurs :

$$\alpha_l'' = \frac{\alpha_l(kR_1)}{k^3 v_A} \quad \text{et} \quad \beta_l'' = \frac{\beta_l(kR_1)}{k^3 v_A}$$

où α_l et β_l sont les fonctions données par les formules (13) et $v_A = \frac{4\pi}{3} r_A^3$ est le volume atomique du métal A.

En prenant $N' = 140$, ce qui correspond à $kR_1 \simeq 10 \simeq 5{,}2\ kr_A$, les α_l'' et β_l'' ne contribuent que pour 10 à 20 % aux α_l' et β_l' et l'erreur sur ceux-ci ne doit pas dépasser quelques centièmes. Nous avons obtenu par ce procédé les valeurs numériques du tableau suivant :

TABLEAU II

COEFFICIENTS DE LA FORMULE (43) POUR UN MÉTAL MONOVALENT A C. F. C.

$\alpha_0' = 1{,}1$	$\beta_0' = 0{,}2$
$\alpha_1' = -2{,}4$	$\beta_1' = -1{,}2$
$\alpha_2' = -1{,}9$	$\beta_2' = 2{,}4$
$\alpha_3' = 4{,}9$	$\beta_3' = 3{,}5$

Le calcul de α_0' peut se faire avec précision par une autre méthode, qui donne $\alpha_0' = 1{,}052$, mais ne s'applique pas au calcul numérique des autres coefficients [25].

Dans le tableau III, nous comparons aux valeurs expérimentales de Drain [19], Rowland [20] et Sugawara [26] les variations relatives de déplacement de Knight, par unité de concentration, que nous avons calculées suivant la formule (43) en utilisant les déphasages de Blatt.

L'accord entre ces résultats est satisfaisant dans l'ensemble, surtout lorsque l'effet de valence est assez fort. Il faut cependant faire quelques réserves pour **Cu** Zn et **Cu** Sn, à cause du moment quadrupolaire du cuivre. Notre résultat trop faible pour **Ag** Cd est à rapprocher du fait que Rowland observe ainsi une diminution du déplacement de Knight de l'argent dans les alliages **Ag** Au, proportionnelle à la concentration en or, avec

$$-\frac{1}{c}\frac{\overline{\delta K}}{K} \simeq 0{,}25.$$

Dans ces alliages, où il n'y a ni effet de valence, ni effet de taille important, les approximations que nous avons faites ne conduisent à aucune variation du déplacement de Knight. En négligeant les termes en $\nabla u . \nabla \psi$ dans les équations (20 et (25) nous n'avons pas tenu compte du changement de caractère *s-p* des fonctions d'onde avec le remplissage de la bande de conductibilité. En fait, les

TABLEAU III

COMPARAISON DES RÉSULTATS THÉORIQUES ET EXMÉRIMENTAUX

ALLIAGE	$-\frac{1}{c}\frac{\overline{\delta K}}{K}$ MESURÉ		CALCULÉ
Ag Cd	0,34	[19]	0,15
Ag Cd	0,4	[20]	
Ag In	0,7	[20]	0,7
Ag Sn	1,1	[20]	1,1
Ag Sb	1,2	[20]	1,0
Cu Zn	0,15	[26]	0,1
Cu Sn	1,2	[26]	0,9

mesures de chaleur spécifique électronique montrent que les densités d'états au niveau de Fermi sont un peu différentes dans l'or et dans l'argent [27] ; ceci indique que les modifications de caractère *s-p* des fonctions d'onde quand on passe du bas de la bande de conductibilité au niveau de Fermi ne sont pas les mêmes dans ces deux métaux. La dissolution de l'or dans l'argent doit donc créer des perturbations qui se traduisent par des déphasages petits mais non nuls pour les fonctions d'onde dans l'argent [28], [29]. Des corrections analogues seraient sans doute à faire dans la série **Ag** Cd, In, Sn, Sb, mais, l'effet de valence l'emportant de beaucoup, elles ne sont sensibles que pour **Ag** Cd. La discussion de l'annexe I montre que ces corrections interviendraient dans le sens favorable au moins en ce qui concerne **Ag** Cd.

5. **Élargissement des raies.** — Il est évident sur la figure 8, que les fluctuations de densité électronique sur les atomes de la matrices doivent entraîner un élargissement considérable de la raie de résonance nucléaire. Comme le calcul de la forme de la raie n'est pas possible pratiquement, nous calculerons seulement son second moment, en supposant que cette quantité représente assez bien la largeur de la raie.

Soit ΔH le déplacement de Knight absolu et h_0 la demi-largeur de raie du métal A pur dans un champ H. Sa demi-largeur dans l'alliage doit être, pour le même champ :

$$h_1 = \sqrt{h_0^2 + h^2}$$

où

$$\frac{h}{\Delta H} = \sqrt{\overline{\left(\frac{\delta K}{K}\right)^2} - \left(\frac{\overline{\delta K}}{K}\right)^2} = \sqrt{\overline{\left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)^2} - \left(\frac{\overline{\delta\rho}}{\rho}\right)^2}. \quad (45)$$

Avec les hypothèses du désordre parfait et de concentration c très faible que nous avons faites précédemment, on trouve, par un calcul tout à fait analogue à celui qui aboutit à la formule (42) :

$$\overline{\left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)^2} = c \sum_{R \neq 0} \frac{\delta\rho^2(\boldsymbol{R})}{\rho^2(\boldsymbol{R})} = cD^2.$$

Le nombre D ne dépend que de la nature de

l'alliage tant que la concentration c demeure faible. D'autre part, la formule (41) montre que le terme $\left(\frac{\overline{\delta\rho}}{\rho}\right)^2$ est du second ordre en c. Par conséquent :

$$h_1 = \sqrt{h_0^2 + cD^2(\Delta H)^2} \quad \text{pour} \quad c \ll 1. \tag{46}$$

Le déplacement de Knight absolu ΔH étant proportionnel au champ magnétique H appliqué, on voit que si la raie de résonance du métal A pur était parfaitement fine, sa largeur dans l'alliage serait proportionnelle au champ H appliqué.

Pour l'argent, $h_0^2 \simeq 0{,}1$ gauss² ; le terme $cD^2(\Delta H)^2$ a sensiblement la même valeur dans le cas de l'alliage **Ag** Cd pour $c = 0{,}01$ et $H = 10\,000$ gauss ; il devient beaucoup plus grand quand on passe à des atomes dissous de valence plus élevée (In, Sn, Sb). Il en résulte que la largeur de raie doit croître sensiblement comme c aux concentrations de quelques centièmes pour lesquelles la formule (42) est encore valable. Nous avons calculé les valeurs de $\overline{\left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)^2}$ pour **Ag** Cd, **Ag** In, **Ag** Sn et **Ag** Sb et les largeurs h_1 qu'on en déduit

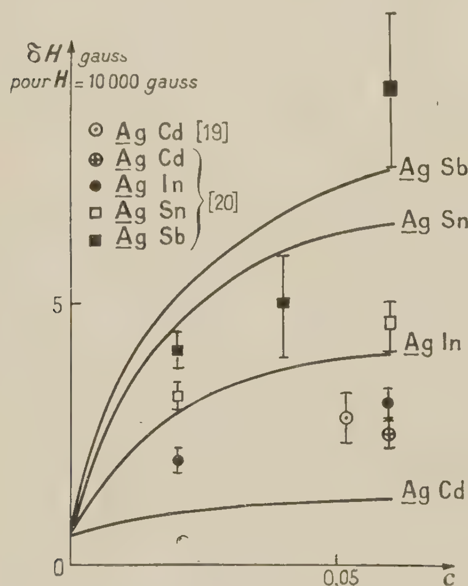


Fig. 9. — Comparaison des largeurs de raie de l'argent observées par Drain [19] et Rowland [20] aux seconds moments calculés suivant la formule (46).

d'après la formule (46). La figure 9 permet de comparer les résultats expérimentaux de Drain et de Rowland aux courbes déduites de ce calcul. L'accord est assez bon dans l'ensemble, surtout si l'on tient compte des approximations faites dans les calculs et de l'incertitude de plusieurs des valeurs expérimentales.

Le fait de remplacer certains atomes d'argent par des atomes étrangers modifie la partie de la largeur de raie due aux interactions dipolaire et d'échange indirect entre noyaux. Les courbes de la figure 9 indiquent que ces modifications sont petites devant l'élargissement dû aux fluctuations de densité électronique, tout au moins avec les champs magnétiques de cinq à dix mille gauss utilisés dans les expériences. C'est ce que justifie un calcul développé dans l'annexe III.

6. **Alliages liquides.** — Le calcul que nous avons fait du déplacementde Knight moyen de la matrice peut être modifié de façon qu'il s'applique au cas d'alliages liquides près de leur point de fusion. Près du point de fusion, en effet, il subsiste un certain ordre local autour de chaque atome dans le liquide. L'arrangement des atomes voisins correspond généralement à peu près à la structure cristalline du solide juste au-dessous du point de fusion. D'autre part, à cause de l'absence d'ordre à grande distance, la surface de Fermi du métal liquide doit être plus voisine d'une sphère que dans le solide cristallisé : c'est ainsi que les semi-métaux, peu conducteurs à l'état solide, deviennent bons conducteurs par fusion, la propagation des électrons n'étant plus gênée par la structure des zones de Brillouin.

Pour appliquer la formule (43) aux alliages liquides, nous calculons les coefficients β'_l et α'_l de la façon suivante : nous effectuons les sommes des fonctions $n_l^2 - j_l^2$ et $j_l\, n_l$ sur les positions des N_1 noyaux premiers voisins d'un atome dissous, en admettant que la structure locale est restée celle de la matrice à l'état solide ; la répartition des atomes plus éloignés étant aléatoire, nous évaluons leur contribution aux α'_l et β'_l en intégrant les fonctions $n_l^2 - j_l^2$ et $n_l\, j_l$ à l'extérieur d'une sphère de volume $v_B + N_1\, v_A$; v_A est le volume atomique du solvant A et v_B celui du métal dissous B. Pour déterminer la distance d'un noyau B à ses premiers voisins A, en tenant compte de l'effet de taille, nous avons considéré un cube de volume $v_B + v_A$ dans le cas d'un environnement cubique centré autour de l'atome B, et un cube de volume $v_B + 3\, v_A$ dans l'hypothèse d'un arrangement cubique à faces centrées. En principe, il faudrait prendre pour v_A le volume molaire partiel du métal B dans le métal A à de très faible concentration.

Nous avons appliqué ce procédé au calcul du déplacement de Knight de la matrice dans les alliages **Na** K, **Na** Rb, **Rb** Na, **Na** Au et **Na** Hg sur lesquels des mesures ont été faites [21], [22]. Ne connaissant pas le volume molaire partiel du soluté dans ces alliages, nous admettons que l'atome dissous y conserve son volume normal. A l'exception de **Na** Hg, les deux constituants de ces alliages sont monovalents, mais les électrons de conductibilité y ont des masses effectives un peu différentes [4]. D'après la discussion du paragraphe 1, nous ne devons pas nous attendre ici à un très bon accord avec l'expérience car seul l'effet de

taille intervient dans notre calcul des déphasages suivant la méthode de Blatt. Le tableau IV reproduit les déphasages que nous avons calculés pour ces alliages :

TABLEAU IV

CHARGES EFFECTIVES Z' ET DÉPHASAGES DANS LES ALLIAGES LIQUIDES

ALLIAGE	Z'	$k_F a$	$k_0 a$	η_0	η_1	η_2
Na K	— 0,92	2,4	1,43+	— 0,541	— 0,227	— 0,044
Na Rb	— 1,4	2,57	1,43+	— 0,75	— 0,344	— 0,082
Rb Na	0,58	1,44	1,29	0,59	0,10	
Na Au	0,57	1,44	1,29	0,59	0,10	
Na Hg	1,41	1,61	1,82	1,02	0,36	0,02

+ Pour $Z' < 0$, le potentiel est répulsif : $V_P = (k_0\, a)^2/2$

Les volumes atomiques du potassium et du rubidium étant de l'ordre du double de celui du sodium, nous envisageons deux possibilité pour l'environnement d'un de ces atomes dissous dans le sodium : soit huits premiers voisins, comme dans la structure cubique centrée du sodium, soit en environnement plus compact de douze premiers voisins, comme dans une structure cubique à faces centrées. Nous comparons dans le tableau V les résultats de notre calcul aux mesure de Bloembergen et Rimaï [21] d'une part, d'Oriani et Webb [22] d'autre part.

TABLEAU V

COMPARAISON DES RÉSULTATS THÉORIQUES ET EXPÉRIMENTAUX (1)

$\frac{1}{c}\overline{\frac{\delta K}{K}}$

ALLIAGE	MESURÉ	CALCULÉ c. c.	CALCULÉ c. f. c.
Na K	0,35 [21]	0,1	0,25
Na Rb	0,5 [21]	0,15	0,4
Rb Na	— 0,25 [21]	— 0,23	
Na Au	(— 0,5) [22]	— 0,2	
Na Hg	(— 0,5) [22]	— 0,1	

On voit que notre calcul rend compte non seulement du signe, mais de l'ordre de grandeur des effets observés. Dans Na K et Na Rb, où le soluté est plus gros que le solvant, nous obtenons le meilleur accord avec un environnement compact, tandis que l'empilement cubique centré doit demeurer pour les autres alliages, dont le soluté est plus petit que le solvant. Les mesures faites aux rayons X par Gingrich et Henderson [30] sur Na K semblent légèrement favorables à nos conclusions pour cet alliage.

(1) **Note ajoutée à la correction.** Depuis la rédaction du manuscrit, Oriani et Webb nous ont communiqué les résultats suivants de leurs mesures récentes sur d'autres alliages de métaux alcalins :

$\frac{1}{c}\frac{\delta K}{K}$

ALLIAGE	MESURÉ	CALCULÉ
Na Li	— 0,5	— 0,57
Na Cs	0,7	0,67 (avec 12 premiers voisins)
Cs Na	— 0,43	— 0,3

Afin de permettre une comparaison meilleure des résultats théoriques et expérimentaux, compte tenu des incertitudes considérables qui entachent les mesures, nous reproduisons sur la figure 10 les résultats d'Oriani et Webb pour Na Au et Na Hg et les droites correspondantes calculées selon notre théorie. Il est très probable que les fluctuations de densité électronique telles que nous les avons décrites ne soient pas la cause principale de la variation du déplacement de Knight observé dans Na Hg. En effet, le mercure est assez fortement électronégatif vis-à-vis du sodium et la dissolution du mercure dans le sodium s'accompagne d'une contraction considérable du liquide [31]. Le volume molaire partiel du mercure est très petit aux concentrations faibles et, d'autre part, le mercure et le sodium forment plusieurs composés définis, ce qui indique que l'écran électronique du mercure doit affecter fortement les atomes du sodium voisins. Notre calcul n'est probablement plus valable dans ce cas.

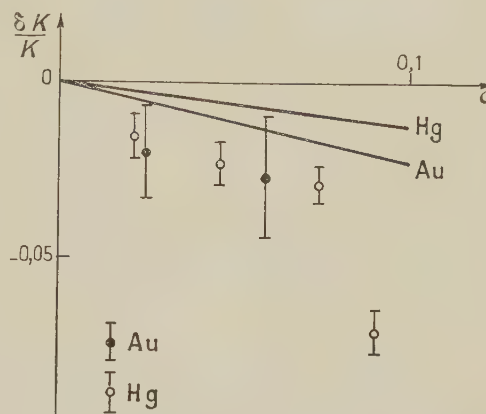


FIG. 10. — Variations du déplacement de Knight du sodium dans Na Au et Na Hg. Comparaison des points expérimentaux [22] aux droites calculées.

7. Conclusion. — Dans cette partie, nous avons expliqué les caractères essentiels des variations de déplacement de Knight observées dans les alliages en les reliant aux fluctuations de densité électronique créées par les atomes dissous. Nous avons prouvé ainsi qu'elles ne sont pas dues à des interactions entre atomes premiers voisins seulement.

Dans le cas d'alliages solides, nous avons rendu compte d'une façon quantitativement satisfaisante de la proportionnalité des variations aux concentrations d'atomes dissous. Nous avons montré pourquoi cet effet est d'autant plus important que la différence de valence entre le soluté et la matrice est plus grande.

Nous avons également pu étendre notre théorie aux alliages liquides et trouvé un bon accord pour les métaux alcalins.

Manuscrit reçu le 17 avril 1959.

SUR CERTAINS TYPES D'ÉQUATIONS D'ONDES NON LINÉAIRES GÉNÉRALISANT LES ÉQUATIONS DE LA THÉORIE DES PARTICULES A SPIN

Par Gérard PETIAU,
Institut Henri-Poincaré, Paris.

Résumé. — Formalisme général d'une théorie des particules à spin dans laquelle celles-ci sont décrites par des spineurs déterminés par des équations d'ondes, systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre non linéaires, dont les solutions ondes planes sont des fonctions elliptiques ou multiplement périodiques de type donné. Exemples d'équations d'ondes non linéaires décrivant des particules de spin 0, $\hbar/2$ ou $\hbar$. Exemples et solutions complètes d'équations non linéaires décrivant des champs unifiés de spin 0 et $\hbar$ ou de spin 0 et $\hbar/2$.

Abstract. — The general formalism of a theory of particles with spin is given where these are specified by spinorial functions which are solutions of systems of non-linear partial differential wave-equations of the first order. The plane wave solutions of these equations are elliptical or hyperelliptical functions of a given type. Examples and complete solutions are given of non-linear equations for unified fields of spin 0 and $\hbar$ or 0 and $\hbar/2$.

1. Introduction. — Caractérisation de fonctions d'ondes généralisées.

Dans plusieurs publications antérieures j'ai déjà étudié divers types de généralisations de l'équation d'ondes de Klein-Gordon [3], [4].

Je me propose ici de généraliser la méthode utilisée pour obtenir des équations d'ondes non linéaires extensions de l'équation de Dirac ou plus généralement des équations de la théorie linéaire des particules à spin de Dirac-Fierz [1], [2]. Ces équations seront des systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, non linéaires susceptibles de décrire des particules à spin plus complexes que celles décrites par l'équation de Dirac ordinaire ou ses extensions.

Je vais d'abord rappeler brièvement les idées que j'ai été conduit à prendre pour base d'une théorie généralisée des particules élémentaires.

Dans la théorie linéaire ordinaire le corpuscule n'est caractérisé que par une seule constante intrinsèque : sa masse propre réduite $\mu_0 = m_0 c/\hbar$. La fonction d'ondes est alors, tout au moins dans certains systèmes de références privilégiés que l'on peut considérer comme repères propres du corpuscule, une combinaison d'ondes planes, fonctions trigonométriques de la variable

$$u = \mu_0 \tau = Kct - (\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}) = K_\mu x^\mu \tag{1}$$

avec

$$K^2 - \boldsymbol{K}^2 = K_0^2 = \mu_0^2, \qquad (\boldsymbol{p} = \hbar \boldsymbol{K},\ W = \hbar c K).$$

Suivant l'expression de M. Louis de Broglie dans son système propre le corpuscule élémentaire est essentiellement une horloge associée au corpuscule par l'intermédiaire de la constante μ_0.

On peut penser que cette limitation à une seule constante intrinsèque des éléments caractéristiques du corpuscule est peut-être insuffisante.

En effet la plupart des corpuscules élémentaires sont instables et possèdent une « vie moyenne » caractéristique. D'autre part il semble qu'une théorie satisfaisante des corpuscules élémentaires doit pouvoir unifier leur description en présentant les différents corpuscules comme états ou dégénérescence d'une représentation générale qui ne semble pas pouvoir être obtenue par les théories linéaires considérées jusqu'ici.

J'ai alors été amené à formuler l'hypothèse qu'une représentation plus adéquate des corpuscules élémentaires serait peut-être obtenue en considérant que dans le système propre la fonction d'ondes, onde plane élémentaire la plus simple, serait non plus une fonction simplement périodique mais une fonction multiplement périodique.

Dans le cas le plus immédiat où la fonction d'ondes reste uniforme, celle-ci au lieu d'être une fonction trigonométrique de u serait une fonction elliptique et si l'on se restreint ce qui semble physiquement nécessaire aux fonctions régulières d'amplitudes restant partout finies, une fonction elliptique de Jacobi.

Dans les cas plus généraux, les fonctions à considérer, multiplement périodiques cessent obligatoirement d'être uniformes. La classe des fonctions les plus simples que nous rencontrons est celle des fonctions hyper-elliptiques rentrant dans la catégorie des fonctions abeliennes.

Si l'on considère l'équation de Klein-Gordon

$$\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) + \mu_0^2\right] \Psi(\boldsymbol{x}, t) = 0 \tag{2}$$

les solutions ondes planes les plus simples $\Psi(u)$ sont déterminées par l'équation différentielle

$$\frac{d^2 \Psi}{du^2} + \Psi(u) = 0$$

ou

$$\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}u} = \sqrt{C_0^2 - \Psi^2}, \qquad u - u_0 = \int_{\Psi_0}^{\Psi} \frac{\mathrm{d}\Psi}{\sqrt{C_0^2 - \Psi^2}}$$

d'où

$$\Psi = C_0 \sin (u - u_0 + \xi_0),$$

$$(\Psi_0 = C_0 \sin \xi_0, \qquad C_0^2 = \Psi_0'^2 + \Psi_0^2).$$

Ψ est obtenu ici par inversion de l'intégrale abelienne la plus simple.

Dans le cas général où l'équation de Klein-Gordon est remplacée par une équation telle que

$$\Box \Psi + F(\Psi) = 0 \tag{3}$$

les ondes planes $\Psi(u)$ sont déterminées par une équation différentielle telle que

$$\frac{\mathrm{d}^2 \Psi}{\mathrm{d}u^2} + F(\Psi) = 0$$

ou

$$\left(\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}u}\right)^2 + 2 \int_{u_0}^{u} F(\Psi) \frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}u} \mathrm{d}u = C_0$$

ou encore

$$\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}u} = \sqrt{G(\Psi)},$$

$$u - u_0 = \int_{\Psi_0}^{\Psi} \frac{\mathrm{d}\Psi}{\sqrt{G(\Psi)}}, \tag{4}$$

Si la fonction $F(\Psi)$ est un polynôme de degré impair soit $2n - 1$ de la fonction Ψ, la fonction $\Psi(u)$ obtenue par inversion de la dernière intégrale sera une fonction hyperelliptique possédant $2n - 2$ périodes.

Réciproquement, on peut considérer $\Psi(u)$ donnée *a priori* comme fonction hyperelliptique d'un type déterminé caractérisé par la localisation dans le plan complexe de la variable Ψ d'un certain nombre de points singuliers. $\Psi(u)$ sera alors complètement définie et sera une fonction hyperelliptique dont les périodes seront déduites à partir des racines de $G(\Psi) = 0$ par des intégrales prises le long de contours convenables.

Si cette méthode permet de construire des fonctions d'ondes de types très généraux et d'obtenir les équations d'ondes correspondantes, la généralisation des équations de Dirac est beaucoup moins directe.

On admet généralement que la symétrie relativiste et le rôle attribué dans le schéma général de la mécanique ondulatoire à la fonction d'ondes exigent que l'équation d'ondes ne contienne que des dérivées premières des fonctions d'ondes celles-ci figurant linéairement.

Je conserverai cette condition et les généralisations des équations d'ondes des particules à spin que je vais envisager seront encore linéaires par rapport aux dérivées partielles du premier ordre des fonctions d'ondes.

2. Le formalisme linéaire et l'équation de Dirac. — Les équations de Dirac sont généralement formulées suivant divers algorithmes.

L'algorithme de Dirac utilise les variables d'espace-temps, x, y, z, ct et des matrices $\boldsymbol{\alpha}$, α_4 hermitiennes et anticommutantes. L'algorithme de von Neuman utilise des variables d'univers, x, y, z et $x_4 = ict$ avec des matrices γ_μ en introduisant une symétrie complète entre espace et temps. Ceci entraîne notamment la perte du caractère hermitien des observables et aussi masque certaines propriétés associées au caractère topologique de l'espace.

L'algorithme des spineurs de van der Waerden utilisé dans la théorie des particules à spin, notamment dans les travaux fondamentaux de Dirac et de M. Fierz nous a semblé plus adapté aux généralisations que nous avons en vue.

Le terme spineur ayant été depuis les travaux initiaux de van der Waerden dévié de son sens original tant par les physiciens anglo-saxons que par les mathématiciens je rappellerai brièvement comment se présentent les équations de Dirac suivant cet algorithme.

Dans le formalisme de van der Waerden l'électron n'est pas décrit par un être mathématique Ψ_k à quatre composantes, mais par l'association de deux êtres géométriques complexes chacun à deux composantes soient φ_l et χ_l ($l = 1,2$). Leurs complexes conjugués sont $\varphi_{\dot{l}}$ et $\chi_{\dot{l}}$. Les variables x, y, z, t sont remplacées par des variables spinorielles $x_{\dot{l}m}$ qui sont des spineurs du second ordre. Les $x_{\dot{l}m}$ sont liés à x, y, z, t par les relations

$$x_{\dot{1}1} = t + z = x^{\dot{2}2}, \qquad x_{\dot{1}2} = x + iy = - x^{\dot{2}1},$$

$$x_{\dot{2}2} = t - z = x^{\dot{1}1}, \qquad x_{\dot{2}1} = x - iy = - x^{\dot{1}2},$$

(il y a toujours commutation entre indices pointés et non pointés). Les indices spinoriels sont élevés et abaissés en utilisant le spineur

$$\varepsilon^{lm} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \varepsilon_{lm} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \varepsilon^{lm} \varepsilon_{lp} = \delta_p^m,$$

$$\xi_A = \varepsilon_{AB} \xi^B, \qquad \xi^A = \varepsilon^{BA} \xi_B.$$

La relation

$$\xi^l \eta_l = - \xi_l \eta^l$$

entraîne notamment

$$\xi^l \xi_l = 0.$$

Spineurs du second ordre $\xi_{\dot{l}m}$ et vecteurs sont associés biunivoquement par la correspondance

$$\xi_{\dot{l}m} = A^\mu g_{\mu . \dot{l}m} = A_\mu g^{\mu}_{. \dot{l}m},$$

$$A^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu . \dot{l}m} \xi_{\dot{l}m} = \frac{1}{2} g^{\mu .}_{\dot{l}m} \xi^{\dot{l}m},$$

avec

$$g_{1,im} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad g_{2\cdot im} = \begin{vmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{vmatrix},$$

$$g_{3,im} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad g_{0\cdot im} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$g_{1,}{}^{im} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad g_{2,}{}^{im} = \begin{vmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{vmatrix},$$

$$g_{3,}{}^{im} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad g_{0,}{}^{im} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$g_{1,m}^{i} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad g_{2,m}^{i} = \begin{vmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{vmatrix},$$

$$g_{3,m}^{i} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad g_{0,m}^{i} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Au vecteur gradient $\dfrac{\partial}{\partial x_\mu}$ correspond le spineur gradient

$$\partial_{im} = \partial_\mu g^{\mu\cdot}{}_{im}, \quad \partial^{im} = \partial_\mu g^{\mu,im}, \quad \partial_i^m = \partial_\mu g^{\mu,m}_{i}$$

soit

$$\partial_{im} = \begin{vmatrix} \partial_t - \partial_z & -(\partial_x + i\partial_y) \\ -(\partial_x - i\partial_y) & \partial_t + \partial_z \end{vmatrix},$$

$$\partial^{im} = \begin{vmatrix} \partial_t + \partial_z & \partial_x - i\partial_y \\ \partial_x + i\partial_y & \partial_t - \partial_z \end{vmatrix}.$$

Les équations de Dirac s'expriment par la correspondance différentielle linéaire entre φ_l et χ_l :

$$\partial_i^m \varphi_m = \varkappa_1 \chi_i, \qquad \partial_m^i \chi_i = \varkappa_2 \varphi_m. \tag{5}$$

$\varkappa_1$ et $\varkappa_2$ désignant *deux* constantes complexes. Par itération on a

$$\partial_p^i \partial_i^m \varphi_m = \varkappa_1 \partial_p^i \chi_i = \varkappa_1 \varkappa_2 \varphi_p.$$

Or

$$\partial_{ip} \partial^{lm} - \Box \delta_p^m = -\partial_p^i \partial_i^m$$

d'où

$$\Box \varphi_m + \varkappa_1 \varkappa_2 \varphi_m = 0, \qquad \Box \chi_i + \varkappa_1 \varkappa_2 \chi_i = 0.$$

On pose ordinairement

$$\varkappa_1 = \varkappa_2 = \varkappa_0$$

avec $\varkappa_0$ réel et positif.

Les solutions ondes planes du système (5) jouent un rôle particulier. On les obtient en cherchant des spineurs χ_i, φ_m solutions de (5) qui soient fonctions de la seule variable

$$u = Kct - (\boldsymbol{Kx}) = K_\mu x^\mu.$$

Si aux vecteurs K_μ et x^μ on fait correspondre des spineurs

$$K_{im} = K_\mu g^{\mu\cdot}_{im} \quad \text{et} \quad x^{im} = x^\mu g^{im}_{\mu,},$$

la relation

$$g^{\mu,im} g_{\nu,im} = 2\delta^\mu_\nu$$

nous donne

$$u = K_\mu x^\mu = \frac{1}{2} K_{im} x^{im}.$$

Pour des spineurs ondes planes $\varphi_m(u)$ nous aurons

$$\partial_{im} = \partial_\mu g^{\mu\cdot}_{im} = K_\mu g^{\mu\cdot}_{im} \frac{\partial}{\partial u} = K_{im} \frac{\partial}{\partial u}. \tag{7}$$

et le système (5) devient

$$K_i^m \frac{\partial}{\partial u} \varphi_m(u) = \varkappa_1 \chi_i(u), \tag{8}$$

$$K_m^i \frac{\partial}{\partial u} \chi_i(u) = \varkappa_2 \varphi_m(u).$$

Pour résoudre ce système nous poserons

$$\varphi_m(u) = a_m f_1(u), \qquad \chi_i(u) = b_i f_2(u), \tag{9}$$

a_m, b_i désignant des spineurs constants, $f_1(u)$ désignant une même fonction pour φ_1 et φ_2, $f_2(u)$ une même fonction pour χ_1 et χ_2. Nous avons alors

$$K_i^m a_m \frac{\partial}{\partial u} f_1 = \varkappa_1 b_i f_2, \tag{10}$$

$$K_m^i b_i \frac{\partial}{\partial u} f_2 = \varkappa_2 a_m f_1.$$

Les fonctions $f_1(u)$, $f_2(u)$ d'une part, les spineurs constants a_m, b_l d'autre part sont déterminés maintenant par

$$\begin{cases} f_1' = \alpha_1 f_2, \\ f_2' = \alpha_2 f_1, \end{cases} \qquad \begin{cases} K_i^m a_m = \dfrac{\varkappa_1}{\alpha_1} b_i. \\ K_m^i b_i = \dfrac{\varkappa_2}{\alpha_2} a_m. \end{cases} \tag{11}$$

Le premier de ces systèmes donnant

$$f_1'' = \alpha_1 f_2' = \alpha_1 \alpha_2 f_1$$

nous montre que les fonctions f_1 et f_2 ne seront bornées que si nous avons $\alpha_1 \alpha_2 < 0$.

Nous pourrons sans perte de généralité poser $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$ et nous aurons

$$f_1' = f_2, \qquad f_2' = -f_1, \tag{12}$$

d'où

$$f_1 = \lambda \sin(u + \xi), \qquad f_2 = \lambda \cos(u + \xi). \tag{13}$$

Le second système (11) donne alors

$$K_r^i K_i^m a_m = \varkappa_1 K_r^i b_i = -\varkappa_1 \varkappa_2 a_r$$

ou

$$K_0^2 \delta_l^m a_m = \varkappa_1 \varkappa_2 a_l.$$

Nous voyons apparaître une nouvelle condition

$K_0^2 = \varkappa_1 \varkappa_2$ réel et positif.

u_m désignant un spineur arbitraire, pour $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ réels et positifs,

$$\varphi_m(u) = \lambda\sqrt{\varkappa_2}\, u_m \sin(u + \xi) \qquad (14)$$

$$\chi_i(u) = \lambda\sqrt{\varkappa_1}\, K_i^m\, u_m \cos(u + \xi).$$

La marche suivie ci-dessus nous montre comment nous devons procéder pour introduire des fonctions d'ondes doublement ou multiplement périodiques.

Nous avons introduit les fonctions circulaires $\sin u$ et $\cos u$ par des fonctions $f_1(u)$, $f_2(u)$ caractérisant chacune un spineur φ_m ou χ_i. C'est le système du premier ordre

$$f_1' = \alpha_1 f_2, \qquad f_2' = \alpha_2 f_1$$

avec

$$\alpha_1 \alpha_2 < 0$$

qui a déterminé le type fonctionnel des solutions.

3. Définition des fonctions elliptiques de Jacobi par un système différentiel du premier ordre. — La recherche des fonctions d'ondes et des équations d'ondes généralisées nous conduit donc à préciser d'abord la forme possible des systèmes différentiels généralisant le système ci-dessus.

Nous avons déjà rappelé que les fonctions périodiques les plus simples après les fonctions circulaires sont les fonctions elliptiques de Jacobi. Or si nous considérons des fonctions réelles, la théorie de Jacobi introduit trois types de fonctions

$$\mathrm{cn}\,(u, k), \qquad \mathrm{sn}\,(u, k), \qquad \mathrm{dn}\,(u, k)$$

avec

$$\mathrm{cn}\,(u + K) = -k' \,\mathrm{sd}\, u$$

$$\mathrm{sn}\,(u + K) = \mathrm{cd}\, u$$

$$\mathrm{dn}\,(u + K) = \mathrm{nd}\, u = \frac{1}{\mathrm{dn}\, u}.$$

Pour $k \to 0$, $\mathrm{cn}\, u \to \cos u$, $\mathrm{sn}\, u \to \sin u$, $\mathrm{dn}\, u \to 1$.

Pour $k \to 1$, $\mathrm{cn}\, u \to \dfrac{1}{\mathrm{ch}\, u}$, $\mathrm{sn}\, u \to \mathrm{th}\, u$, $\mathrm{dn}\, u \to \dfrac{1}{\mathrm{ch}\, u}$

Nous pouvons alors considérer deux types de généralisation du système (12) qui déterminait les fonctions $\sin u$ et $\cos u$:

1° La généralisation de (12) où l'on considère

$$\cos u = \sin\left(u + \frac{\pi}{2}\right), \qquad \sin u = -\cos\left(u + \frac{\pi}{2}\right).$$

Deux types d'équations sont alors acceptables :

a$_1$) A partir des relations

$$\mathrm{sn}'\, u = \mathrm{dn}^2 u\, \mathrm{cd}\, u = (1 - k^2 \mathrm{sn}^2 u)\, \mathrm{cd}\, u,$$

$$\mathrm{cd}'\, u = -k'^2 \frac{\mathrm{sn}\, u}{\mathrm{dn}^2 u} = -(1 - k^2 \mathrm{cd}^2 u)\, \mathrm{sn}\, u,$$

on voit que $y_1 = \mathrm{sn} u$, $y_2 = \mathrm{cd}\, u$ vérifient le système

$$y_1' = y_2 - k^2 y_1^2 y_2, \qquad y_2' = -y_1 + k^2 y_2^2 y_1.$$

a$_2$) A partir des relations

$$\mathrm{cn}'\, u = -\mathrm{sn}\, u\, \mathrm{dn}\, u = -(k'^2 + k^2 \mathrm{sn}^2 u)\, \mathrm{sd}\, u,$$

$$\mathrm{sd}'\, u = \frac{\mathrm{cn}\, u}{\mathrm{dn}^2\, u} = (1 + k^2 \mathrm{sd}^2 u)\, \mathrm{cn}\, u,$$

on voit que

$$y_1 = \mathrm{cn}\, u, \qquad y_2 = \mathrm{sd}\, u$$

vérifient le système

$$y_1' = -k'^2 y_2 - k^2 y_1^2 y_2, \qquad y_2' = y_1 + k^2 y_2^2 y_1.$$

2° La généralisation de (12) où l'on considère que $\mathrm{sn}\, u$, $\mathrm{cn}\, u$ généralisent $\sin u$ et $\cos u$, $\mathrm{dn}\, u$ généralisant 1.

Les relations différentielles

$$\mathrm{sn}'\, u = \mathrm{cn}\, u\, \mathrm{dn}\, u, \qquad \mathrm{cn}'\, u = -\mathrm{sn}\, u\, \mathrm{dn}\, u,$$
$$\mathrm{dn}'\, u = -k^2\, \mathrm{sn}\, u\, \mathrm{cn}\, u,$$

conduisent à considérer trois fonctions principales

$$y_1 = \mathrm{sn}\,(u + \xi), \qquad y_2 = \mathrm{cn}\,(u + \xi), \qquad y_3 = \mathrm{dn}\,(u + \xi)$$

telles que

$$y_1' = y_2 y_3, \quad y_2' = -y_1 y_3, \quad y_3' = -k^2 y_1 y_2.$$

Plus généralement nous en concluons que le système ci-dessus a pour solution particulière

$$y_1 = \mathrm{sn}\,(u + \xi_0, k), \qquad y_2 = \mathrm{cn}\,(u + \xi_0, k),$$
$$y_3 = \mathrm{dn}\,(u + \xi_0, k)$$

si les valeurs initiales y_1^0, y_2^0, y_3^0 sont liées par les relations

$$(y_1^0)^2 + (y_2^0)^2 = 1, \qquad k^2(y_1^0)^2 + (y_0^3)^2 = 1,$$
$$k'^2(y_1^0)^2 + (y_2^0)^2 = (y_3^0)^2$$

avec

$$k'^2 = 1 - k^2.$$

Ceci nous conduit à discuter la forme des solutions du système différentiel généralisant le précédent soit

$$f_1' = \alpha_1 f_2 f_3, \quad f_2' = -\alpha_2 f_1 f_3, \quad f_3' = -\alpha_3 f_1 f_2 \quad (15)$$

α_1, α_2, α_3 étant réels et positifs.

On trouve alors les solutions

$$f_1(u) = \left(\frac{\alpha_2(f_1^0)^2 + \alpha_1(f_2^0)^2}{\alpha_2}\right)^{1/2} \mathrm{sn}\,(\rho\, u + \xi_0, k),$$

$$f_2(u) = \left(\frac{\alpha_2(f_1^0)^2 + \alpha_2(f_2^0)^2}{\alpha_1}\right)^{1/2} \mathrm{cn}\,(\rho\, u + \xi_0, k), \quad (16)$$

$$f_3(u) = \left(\frac{\alpha_3(f_1^0)^2 + \alpha_1(f_3^0)^2}{\alpha_1}\right)^{1/2} \mathrm{dn}\,(\rho\, u + \xi_0, k),$$

avec

$$\rho^2 = ((f_1^0)^2 \alpha_3 + (f_3^0)^2 \alpha_1) \alpha_2$$

$$k^2 = \frac{((f_1^0)^2 \alpha_2 + (f_2^0)^2 \alpha_1) \alpha_3}{((f_1^0)^2 \alpha_3 + (f_3^0)^2 \alpha_1) \alpha_2} \tag{17}$$

$$\text{tn}^2 \xi_0 = \frac{\text{sn}^2 \xi_0}{\text{cn}^2 \xi_0} = \frac{\alpha_2 (f_1^0)^2}{\alpha_1 (f_2^0)^2}.$$

Ces expressions se simplifient lorsque nous posons

$$\lambda_1 = [\alpha_2 (f_1^0)^2 + \alpha_1 (f_2^0)^2]^{1/2}, \qquad \lambda_2 = [(f_1^0)^2 \alpha_3 + (f_3^0)^2 \alpha_1]^{1/2}$$

puis

$$\lambda_1 = \lambda \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}, \qquad \rho = \lambda_2 \sqrt{\alpha_2},$$

$$k = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \sqrt{\frac{\alpha_3}{\alpha_2}} = \frac{\lambda}{\rho} \sqrt{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3},$$

alors nous écrivons

$$f_1(u) = \lambda \sqrt{\alpha_1} \text{ sn} \left(\rho u + \xi_0, \quad \frac{\lambda}{\rho} \sqrt{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}\right), \tag{18}$$

$$f_2(u) = \lambda \sqrt{\alpha_2} \text{ cn} \left(\rho u + \xi_0, \quad \frac{\lambda}{\rho} \sqrt{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}\right),$$

$$f_3(u) = \frac{\lambda}{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}} \text{dn} \left(\rho u + \xi_0, \quad \frac{\lambda}{\rho} \sqrt{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}\right).$$

On voit que si

$$\alpha_3 = 0, \quad k = 0, \quad f_3 = \text{C}^{\text{te}} = \frac{\rho}{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}}.$$

Le système différentiel devient

$$f_1' = \frac{\alpha_1 \rho}{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}} f_2 = \left(\rho \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\right) f_2,$$

$$f_2' = -\frac{\alpha_2 \rho}{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}} f_1 = -\left(\rho \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}\right) f_1,$$

dont la solution est

$$f_1 = \lambda \sqrt{\alpha_1} \sin (\rho u + \xi_0), \qquad f_2 = \lambda \sqrt{\alpha_2} \cos (\rho u + \xi_0).$$

Si α_1, α_2, α_3 sont différents de zéro nous pouvons nous ramener à un système différentiel analogue à (15) avec ici $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$. Pour cela nous poserons

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2 \alpha_3}} \varphi_1, \qquad f_2 = \frac{1}{\sqrt{\alpha_3 \alpha_1}} \varphi_2, \qquad f_3 = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}} \varphi_3.$$

Les φ sont alors déterminés par le système différentiel

$$\varphi_1' = \varphi_2 \varphi_3, \quad \varphi_2' = -\varphi_1 \varphi_3, \quad \varphi_3' = -\varphi_1 \varphi_2. \tag{19}$$

Les fonctions φ_1, φ_2, φ_3 sont liées par les relations

$$(\varphi_1)^2 - (\varphi_1^0)^2 = -(\varphi_2)^2 + (\varphi_2^0)^2 = -(\varphi_3)^2 + (\varphi_3^0)^2. \tag{20}$$

Les solutions s'écrivent

$$\varphi_1 = \lambda_1 \text{ sn} \left(\lambda_2 u + \xi_0, \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right), \tag{21}$$

$$\varphi_2 = \lambda_1 \text{ cn} \left(\lambda_2 u + \xi_0, \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right),$$

$$\varphi_3 = \lambda_2 \text{ dn} \left(\lambda_2 u + \xi_0, \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right),$$

avec

$$\lambda_1^2 = (\varphi_1^0)^2 + (\varphi_2^0)^2, \qquad \lambda_2^2 = (\varphi_1^0)^2 + (\varphi_3^0)^2,$$

$$k^2 = \frac{(\varphi_1^0)^2 + (\varphi_2^0)^2}{(\varphi_1^0)^2 + (\varphi_3^0)^2} = \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2}, \qquad \text{tn}^2 \xi_0 = \frac{(\varphi_1^0)^2}{(\varphi_0^2)^2}. \tag{22}$$

Nous avons supposé ici

$$(\varphi_1^0)^2 < (\varphi_2^0)^2 < (\varphi_3^0)^2. \tag{23}$$

4. **Introduction d'un système différentiel du premier ordre définissant des fonctions multiplement périodiques.** — Nous voyons facilement que le procédé suivi ici pour introduire des fonctions doublement périodiques se généralise pour introduire des fonctions multiplement périodiques.

Nous sommes conduits à considérer le système de n équations différentielles du premier ordre non linéaires

$$f_1' = \varepsilon_1 \alpha_1 f_2 \ldots f_n$$

$$f_p' = \varepsilon_p \alpha_p f_1 \ldots f_{p-1} f_{p+1} \ldots f_n \tag{24}$$

$$f_n' = \varepsilon_n \alpha_n f_1 \ldots f_{n-1}.$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont des constantes > 0, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n = \pm 1$. Posant

$$f_p = \lambda_p \varphi_p$$

avec

$$\lambda_p = (\alpha_p)^{1/2} (\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n)^{-1/2n-4},$$

les fonctions $\varphi_p(u)$ sont déterminées par le système

$$\varphi_p' = \varepsilon_p \varphi_1 \ldots \varphi_{p-1} \varphi_{p+1} \ldots \varphi_n, \tag{25}$$

ou

$$\varphi_p \varphi_p' = \varepsilon_p \varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_p \ldots \varphi_n.$$

L'équivalence entre les systèmes (24) et (25) n'existe évidemment que si tous les α_p sont différents de zéro.

Si l'un des α_p soit α_n devient nul nous sommes ramenés au système différentiel de rang $(n - 1)$, les α_p $(p = 1, 2, \ldots, n - 1)$ étant remplacés par les valeurs $(\alpha_p f_n^0)$ en désignant par f_n^0 la valeur constante que prend alors la fonction f_n. Ce résultat montre comment par confluence les α_p tendant successivement vers 0 notre système différentiel se réduirait au système le plus simple $f_1' = \alpha_1 f_2$, $f_2' = -\alpha_2 f_1$.

Le système (25) s'intègre immédiatement en donnant

$$\varepsilon_1 \varphi_1 \varphi_1' = \varepsilon_2 \varphi_2 \varphi_2' = \ldots = \varepsilon_n \varphi_n \varphi_n'$$

d'où

$$\varepsilon_1 \varphi_1^2 + \beta_1 = \varepsilon_2 \varphi_2^2 + \beta_2 = \ldots = \varepsilon_p \varphi_p^2 + \beta_p. \quad (26)$$

D'autre part

$$\varphi_p'^2 = \varphi_1^2 \ldots \varphi_{p-1}^2 \varphi_{p+1}^2 \ldots \varphi_n^2$$

ou

$$\varphi_p'^2 = \prod_{q \neq p} \varepsilon_q(\varepsilon_p \varphi_p^2 + \beta_p - \beta_q) \quad (27)$$

d'où

$$du = \frac{d\varphi_p}{\left[\prod_{q\neq p} \varepsilon_q(\varepsilon_p \varphi_p^2 + \beta_p - \beta_q)\right]^{1/2}}. \quad (28)$$

Pour que les fonctions $\varphi_p(u)$ soient acceptables du point de vue de la mécanique ondulatoire il nous faut montrer qu'il existe au moins un choix des constantes β_p et des signes ε_p pour lequel toutes les fonctions $\varphi_p(u)$ sont bornées.

Le choix des signes

$$\varepsilon_1 = +1, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \ldots = \varepsilon_p = \varepsilon_n = -1 \quad (29)$$

et la condition

$$\beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_n \quad (30)$$

permettent de satisfaire à cette condition. On voit alors que

$$(\varphi_1')^2 = \prod_{q=2}^{n} (\beta_q - \beta_1 - \varphi_1^2)$$

sera positif sous la seule condition $\varphi_1^2 < \beta_2 - \beta_1$.

$$(\varphi_2')^2 = (\beta_2 - \beta_1 - \varphi_2^2) \prod_{q=3}^{n} (\varphi_2^2 + \beta_q - \beta_2)$$

sera positif sous la seule condition $\varphi_2^2 < \beta_2 - \beta_1$ et

$$(\varphi_p')^2 = (\beta_p - \beta_1 - \varphi_p^2) \prod_{2\leqslant q_1 < p}^{p-1} [\varphi_p^2 - (\beta_p - \beta_{q_1})] \prod_{q_2=p+1}^{n} (\varphi_p^2 + \beta_{q_2} - \beta_p)$$

avec la condition

$$\beta_p - \beta_2 < \varphi_p^2 < \beta_p - \beta_1.$$

($\beta_p - \beta_2$ est la plus grande des différences $\beta_p - \beta_{q_1}$)

Les conditions ci-dessus sont réalisables si l'on prend des valeurs initiales convenables.

On prendra

$$\beta_1 = -(\varphi_1^0)^2, \ldots, \beta_p = +(\varphi_p^0)^2$$

avec

$$-(\varphi_1^0)^2 < (\varphi_2^0)^2 < \ldots < (\varphi_n^0)^2.$$

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ seront alors astreints aux conditions

$$(\varphi_1)^2 < (\varphi_1^0)^2 + (\varphi_2^0)^2, \quad (\varphi_2)^2 < (\varphi_1^0)^2 + (\varphi_2^0)^2,$$
$$(\varphi_p^0)^2 - (\varphi_2^0)^2 < (\varphi_p)^2 < (\varphi_p)^2 + (\varphi_1^0)^2.$$

On pourra prendre sans perte de généralité

$$\beta_1 = (\varphi_1^0)^2 = 0.$$

La fonction φ_1 sera obtenue en inversant l'intégrale

$$u = \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{[((\varphi_2^0)^2 - \varphi^2)((\varphi_3^0)^2 - \varphi^2)\ldots((\varphi_n^0)^2 - \varphi^2)]^{1/2}} \quad (31)$$

et les autres fonctions à partir de celle-ci par les relations

$$\varphi_p = (\varphi_p)^2 - \varphi_1^2.$$

5. **Formalisme général d'une théorie non linéaire des particules à spin.** — Les considérations précédentes me conduisent à admettre que dans la théorie non linéaire introduisant les fonctions multiplement périodiques les plus simples c'est-à-dire les fonctions elliptiques il faudra nécessairement introduire trois spineurs [5].

Nous écrirons ceux-ci

$$\xi_{A\dot{B}}, \eta_{C\dot{D}}, \zeta_{E\dot{F}},$$

A, B, C, D, E, F désignant des groupes d'indices spinoriels que nous préciserons.

Lorsque nous considérerons des ondes planes, ces spineurs seront des fonctions de

$$u = K_\mu x^\mu = \frac{1}{2} K_{lm} x^{lm},$$

et j'admettrai qu'à chaque type de spineur est attaché une fonction de u soient $f_1(u)$, $f_2(u)$, $f_3(u)$, indépendante du spin (c'est-à-dire la même quelque soient les indices du spineur). Les ondes planes associées aux trois spineurs ci-dessus ont donc les expressions

$$\xi_{A\dot{B}} = a_{A\dot{B}} f_1(u), \quad \eta_{C\dot{D}} = b_{C\dot{D}} f_2(u), \quad \zeta_{E\dot{F}} = c_{E\dot{F}} f_3(u) \quad (32)$$

f_1, f_2, f_3 sont liés par les équations qui caractérisent le type fonctionnel, pour des fonctions elliptiques nous écrirons le système (15), α_1, α_2, α_3 réels et positifs et lorsque ces coefficients seront différents de zéro, en les incorporant dans les constantes spinorielles a, b, c,

$$f_1' = f_2 f_3, \quad f_2' = -f_1 f_3, \quad f_3' = -f_1 f_2, \quad (33)$$

Pour les ondes planes les équations d'ondes sont ramenées à des équations différentielles spinorielles.

Le premier membre de ces équations de la forme

$$\partial_{\dot{m}}^{l} \xi_{(A)}^{\dot{m}}$$

((A) désignant un groupe d'indice pointés ou non pointés) s'écrira pour l'onde plane

$$\xi^{\dot{m}}_{(A)} = a^{\dot{m}}_{(A)} f_1(u)$$

$$K^{l}_{\dot{m}} a^{\dot{m}}_{(A)} f'_1(u) = K^{l}_{\dot{m}} a^{\dot{m}}_{(A)} f_2 f_3. \tag{34}$$

Le second membre devra donc, afin de ne dépendre de u que par $f_2(u) f_3(u)$ contenir obligatoirement les spineurs η et ζ chacun une seule fois et selon une combinaison présentant la variance totale $({}^{l}(A))$. Il s'écrit donc

$$\varkappa_1 F(\eta_{C\dot{D}}, \zeta_{E\dot{F}})^{l}_{(A)},$$

$\varkappa_1$ est une constante. F sera un spineur *contracté*, *symétrisé* ou *antisymétrisé* des deux spineurs $\eta_{C\dot{D}}$, $\zeta_{E\dot{F}}$ qui ici sont de la forme

$$\eta_{C\dot{D}} = b_{C\dot{D}} f_2(u), \qquad \zeta_{E\dot{F}} = c_{E\dot{F}} f_3(u).$$

L'équation précédente s'écrit alors

$$K^{l}_{\dot{m}} a^{\dot{m}}_{(A)} f'_1(u) = \varkappa_1 F(b_{C\dot{D}}, c_{E\dot{F}})^{l}_{(A)} f_2 f_3. \tag{35}$$

Les spineurs constants a, b, c s'obtiendront à partir du système

$$K^{l}_{\dot{m}} a^{\dot{m}}_{(A)} = \varkappa_1 F(b_{C\dot{D}}, c_{E\dot{F}})^{l}_{(A)}, \tag{36}$$

et des équations analogues pour les autres composantes.

Les trois spineurs définissant le champ corpusculaire seront donc déterminés par un système de trois équations que nous écrirons

$$\partial^{l}_{\dot{m}} \xi^{\dot{m}}_{(A)} = \varkappa_1 F_1(\eta, \zeta)^{l}_{(A)},$$

$$\partial^{l}_{\dot{m}} \eta^{\dot{m}}_{(B)} = \varkappa_2 F_2(\zeta, \xi)^{l}_{(B)}, \tag{37}$$

$$\partial^{l}_{\dot{m}} \zeta^{\dot{m}}_{(C)} = \varkappa_3 F_3(\xi, \eta)_{(C)},$$

F_1, F_2, F_3 sont des combinaisons de deux spineurs. (A), (B), (C) des groupes d'indices, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ trois constantes réelles.

Pour les ondes planes, nous écrirons

$$\xi^{\dot{m}}_{(A)} = a^{\dot{m}}_{(A)} f_1(u), \ \eta^{\dot{m}}_{(B)} = b^{\dot{m}}_{(B)} f_2(u), \ \zeta^{\dot{m}}_{(C)} = c^{\dot{m}}_{(C)} f_3(u), \tag{38}$$

et les fonctions f_1, f_2, f_3 étant déterminées par les équations différentielles précédentes les spineurs constants $a^{\dot{m}}{}_{(A)}$, $b^{\dot{m}}{}_{(B)}$, $c^{\dot{m}}{}_{(C)}$ devront être solutions des équations

$$K^{l}_{\dot{m}} a^{\dot{m}}_{(A)} = \varkappa_1 F_1(b, c)^{l}_{(A)},$$

$$K^{l}_{\dot{m}} b^{\dot{m}}_{(B)} = \varkappa_2 F_2(c, a)^{l}_{(B)}, \tag{39}$$

$$K^{l}_{\dot{m}} c^{\dot{m}}_{(C)} = \varkappa_3 F_3(a, b)^{l}_{(C)}.$$

Ce n'est que si ce système admet des solutions que le système (37) sera acceptable.

De même nous introduirons des ondes planes multipériodiques en considérant n spineurs que j'écrirai

$$\overset{(p)}{\xi}{}^{\dot{m}}_{(Ap)}$$

$p = 1, \ldots, n$; les (Ap) sont des groupes d'indices spinoriels pointés et non pointés.

Ces n spineurs seront déterminés par n groupes d'équations qui s'écriront

$$\partial^{l}_{\dot{m}} \overset{(p)}{\xi}{}^{\dot{m}}_{(Ap)} = \varkappa_p F_p(\overset{(1)}{\xi}, \ldots \overset{(p-1)}{\xi}, \overset{(p+1)}{\xi} \ldots \overset{(n)}{\xi})^{l}_{(Ap)}. \tag{40}$$

Les $\varkappa_p$ sont n constantes réelles fixées à l'avance. Les F_p sont des combinaisons par contraction, symétrisation ou antisymétrisation contenant chacune les $n - 1$ spineurs autres que ξ et chacun seulement une fois.

Les ondes planes s'obtiendront en écrivant

$$\overset{(p)}{\xi}{}^{\dot{m}}_{(A_p)} = \overset{(p)}{a}{}^{\dot{m}}_{(A_p)} f_p(u) \tag{41}$$

avec

$$f'_p = \varepsilon_p \alpha_p f_1 f_2 \ldots f_{p-1} f_{p+1} \ldots f_n. \tag{42}$$

Le système sera admissible du point de vue des ondes planes si le système déterminant les constantes $\overset{(p)}{a}{}^{\dot{m}}{}_{(A_p)}$, soit

$$K^{l}_{\dot{m}} \overset{(p)}{a}{}^{\dot{m}}_{(A_p)} = \varepsilon_p \frac{\varkappa_p}{\alpha_p} F_p(\overset{(1)}{a}, \ldots, \overset{(p-1)}{a}, \overset{(p+1)}{a}, \ldots \overset{(n)}{a})^{l}_{(Ap)}, \tag{43}$$

admet un système de solutions autres que 0 pour tous les $\overset{(p)}{a}$.

6. Équations d'ondes non linéaires représentant des corpuscules de spin 0.

— Nous allons préciser ces constructions sur quelques exemples qui nous serviront de guide dans des constructions ultérieures.

Considérons les trois spineurs

$$\xi^{l}_{\dot{p}}, \qquad \eta^{l}_{\dot{p}}, \qquad \zeta^{l}_{\dot{p}}.$$

L'équation la plus simple du type indiqué cidessus serait de la forme

$$\partial^{l}_{\dot{m}} \xi^{\dot{m}p} = \varkappa_1 \eta^{l}_{\dot{q}} \zeta^{\dot{q}p}. \tag{44}$$

Mais bien que cette équation possède une variance spinorielle fixée, il n'en est pas de même de sa variance tensorielle.

Nous fixerons cette dernière en considérant des combinaisons symétriques ou antisymétriques des indices l et p soient $(\underline{lp})$ ou $(\underline{lp})$.

Considérons le cas antisymétrique, nous prendrons alors comme système fondamental les trois équations

$$\partial^{l}_{\dot{m}} \xi^{\dot{m}p} = \frac{\varkappa_1}{2} (\eta^{l}_{\dot{q}} \zeta^{\dot{q}p} - \eta^{p}_{\dot{q}} \zeta^{\dot{q}l})$$

$$\partial^{l}_{\dot{m}} \eta^{\dot{m}p} = \frac{\varkappa_2}{2} (\zeta^{l}_{\dot{q}} \xi^{\dot{q}p} - \zeta^{p}_{\dot{q}} \xi^{\dot{q}l}) \tag{45}$$

$$\partial^{l}_{\dot{m}} \zeta^{\dot{m}p} = \frac{\varkappa_3}{2} (\xi^{l}_{\dot{q}} \eta^{\dot{q}p} - \xi^{p}_{\dot{q}} \eta^{\dot{q}l}).$$

Les solutions ondes planes seront de la forme

$$\xi^{m\dot{p}} = a^{m\dot{p}} f_1(u), \quad \eta^{m\dot{p}} = b^{m\dot{p}} f_2(u), \quad \zeta^{m\dot{p}} = c^{m\dot{p}} f_3(u) \quad (46)$$

avec

$$f_1' = f_2 f_3, \qquad f_2' = - f_1 f_3, \qquad f_3' = - f_1 f_2.$$

Les spineurs

$$a^{m\dot{p}}, \qquad b^{m\dot{p}}, \qquad c^{m\dot{p}}$$

sont déterminés par les équations

$$\begin{aligned} K^{l}_{\dot{m}}\, a^{m\dot{p}} &= \frac{\varkappa_1}{2}\left(b^{l}_{\dot{q}}\, c^{q\dot{p}} - b^{\dot{p}}_{q}\, c^{q\dot{l}}\right) \\ K^{l}_{\dot{m}}\, b^{m\dot{p}} &= -\frac{\varkappa_2}{2}\left(c^{l}_{\dot{q}}\, a^{q\dot{p}} - c^{\dot{p}}_{q}\, a^{q\dot{l}}\right) \qquad (47) \\ K^{l}_{\dot{m}}\, c^{m\dot{p}} &= -\frac{\varkappa_3}{2}\left(a^{l}_{\dot{q}}\, b^{q\dot{p}} - a^{\dot{p}}_{q}\, b^{q\dot{l}}\right). \end{aligned}$$

Pour résoudre ce système nous poserons

$$a^{m\dot{p}} = c_1 K^{m\dot{p}}, \quad b^{m\dot{p}} = c_2 K^{m\dot{p}}, \quad c^{m\dot{p}} = c_3 K^{m\dot{p}}. \quad (48)$$

Par identification nous voyons immédiatement apparaître les conditions

$$\varkappa_1 \varkappa_2 < 0, \qquad \varkappa_1 \varkappa_3 < 0, \qquad \varkappa_2 \varkappa_3 > 0. \quad (49)$$

Si nous prenons alors

$$\varkappa_1 > 0, \qquad \varkappa_2 < 0, \qquad \varkappa_3 < 0,$$

les constantes c_1, c_2, c_3 sont données par

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{|\varkappa_2 \varkappa_3|}}, \quad c_2 = \frac{1}{\sqrt{|\varkappa_1 \varkappa_3|}}, \quad c_3 = \frac{1}{\sqrt{|\varkappa_1 \varkappa_2|}}. \quad (50)$$

Par suite, nous obtenons la solution générale du système (45) au moyen de trois constantes arbitraires :

$$\begin{aligned} \xi^{m\dot{p}} &= \frac{\lambda_1}{\sqrt{|\varkappa_2 \varkappa_3|}} K^{m\dot{p}} \operatorname{sn}\left(\lambda_2 u + \xi_0, \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) \\ \eta^{m\dot{p}} &= \frac{\lambda_1}{\sqrt{|\varkappa_1 \varkappa_3|}} K^{m\dot{p}} \operatorname{cn}\left(\lambda_2 u + \xi_0, \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) \qquad (51) \\ \zeta^{m\dot{p}} &= \frac{\lambda_2}{\sqrt{|\varkappa_1 \varkappa_2|}} K^{m\dot{p}} \operatorname{dn}\left(\lambda_2 u + \xi_0, \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right). \end{aligned}$$

La valeur de K_0 est ici encore arbitraire. Mais si l'on remarque que

$$u = K_\mu x^\mu = K_0\, e_\mu x^\mu = K_0 \tau$$

e_μ désignant un vecteur unité, nous voyons qu'en posant

$$\lambda_2 u = K'_\mu x^\mu = K'_0 \tau = v$$

$$k = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \lambda \sqrt{|\varkappa_3|}$$

la solution générale ci-dessus s'écrit

$$\begin{aligned} \xi^{m\dot{p}} &= \frac{\lambda}{\sqrt{|\varkappa_2|}} K'^{m\dot{p}} \operatorname{sn}\left(v + \xi_0, \lambda \sqrt{|\varkappa_3|}\right) \\ \eta^{m\dot{p}} &= \frac{\lambda}{\sqrt{|\varkappa_1|}} K'^{m\dot{p}} \operatorname{cn}\left(v + \xi_0, \lambda \sqrt{|\varkappa_3|}\right) \qquad (53) \\ \zeta^{m\dot{p}} &= \frac{K'^{m\dot{p}}}{\sqrt{|\varkappa_1 \varkappa_2|}} \operatorname{dn}\left(v + \xi_0, \lambda \sqrt{|\varkappa_3|}\right). \end{aligned}$$

Ici

$$v = K'_\mu x^\mu = \frac{1}{2} K'_{\dot{l}m} x^{\dot{l}m}.$$

Pour

$$\varkappa_3 = 0, \qquad \zeta^{m\dot{p}} = \mathrm{C^{te}} = \frac{K'^{m\dot{p}}}{\sqrt{|\varkappa_1 \varkappa_2|}}.$$

Le système étudié ici est susceptible d'une écriture tensorielle simple. Il correspond en effet aux équations vectorielles

$$\partial_\mu A^\mu = \varkappa_1 B_\mu C^\mu, \ \ \partial_\mu B^\mu = \varkappa_2 C_\mu A^\mu, \ \ \partial_\mu C^\mu = \varkappa_3 A_\mu B^\mu \quad (54)$$

liant trois vecteurs A^μ, B^μ, C^μ.

Posant $u = K_\mu x^\mu$

$$A^\mu(u) = a^\mu f_1(u), \ B^\mu(u) = b^\mu f_2(u), \ C^\mu(u) = c^\mu f_3(u) \quad (55)$$

les constantes a^μ, b^μ, c^μ sont déterminées par

$$K_\mu a^\mu = \varkappa_1 b_\mu c^\mu, \ K_\mu b^\mu = \varkappa_2 c_\mu a^\mu, \ K_\mu c^\mu = \varkappa_3 a_\mu b^\mu \ (56)$$

sous les conditions (49)

et avec le choix $\varkappa_1 > 0$, $\varkappa_2 < 0$, $\varkappa_3 < 0$ on trouve

$$a^\mu = \frac{K^\mu}{\sqrt{|\varkappa_2 \varkappa_3|}}, \quad b^\mu = \frac{K^\mu}{\sqrt{|\varkappa_1 \varkappa_3|}}, \quad c^\mu = \frac{K^\mu}{\sqrt{|\varkappa_1 \varkappa_2|}}, \quad (57)$$

et par suite pour A^μ, B^μ, C^μ la solution précédente.

Le système (45) ou (54) décrit un corpuscule de spin 0 mais ce système n'est pas la généralisation du système usuel qui s'écrit

$$\partial_\mu I = \varkappa_0 J_\mu, \qquad \partial_\mu J^\mu = -\varkappa_0 I \qquad (58)$$

ou en spineurs

$$\partial^{l}_{\dot{m}}\, \xi^{m\dot{p}} = \varkappa_0\, \eta^{l\dot{p}}, \qquad \partial^{\dot{l}}_{m}\, \eta^{m\dot{p}} = \varkappa_0\, \xi^{\dot{l}p}. \qquad (59)$$

Nous généraliserons ce système en considérant trois spineurs du second rang

$$\xi^{l\dot{m}}, \qquad \eta^{lm} \quad \text{et} \quad \zeta^{lm}$$

ou un vecteurs J^μ et deux invariants I_1 et I_2.

L'équation d'ondes du corpuscule considéré « de spin 0 » est alors

$$\begin{aligned} \partial^{l}_{\dot{m}}\, \xi^{m\dot{p}} &= \varkappa_1\, \eta^{lq} \zeta_{qp} \\ \partial^{\dot{l}}_{m}\, \eta^{mp} &= \varkappa_2\, \zeta^{\dot{l}q}\, \xi^{p}_{\dot{q}} \qquad (60) \\ \partial^{\dot{l}}_{m}\, \zeta^{mp} &= \varkappa_3\, \eta^{\dot{l}q}\, \xi^{p}_{\dot{q}} \end{aligned}$$

ou en notation tensorielle

$$\partial_\mu J^\mu = \varkappa_1 I_1 I_2, \ \partial_\mu I_1 = \varkappa_2 I_2 J_\mu, \ \partial_\mu I_2 = \varkappa_3 I_1 J_\mu. \ (61)$$

Intégrons ce système dans le cas des ondes planes. Nous avons encore ici avec $u = K_\mu x^\mu$

$$I_1 = a_1 f_2(u), \quad I_2 = a_2 f_3(u), \quad J_\mu = j_\mu f_1(u). \quad (62)$$

Les constantes j^μ, a_1, a_2 sont déterminées par les équations

$$K_\mu j^\mu = \varkappa_1 a_1 a_2, \; K_\mu a_1 = -\varkappa_2 a_2 j_\mu, \; K_\mu a_2 = -\varkappa_3 a_1 j_\mu, \tag{63}$$

Nous sommes encore conduits à prendre

$$\varkappa_1 > 0, \qquad \varkappa_2 = -|\varkappa_2|, \qquad \varkappa_3 = -|\varkappa_3|$$

et nous obtenons

$$a_1 = \frac{K_0}{\sqrt{|\varkappa_1 \varkappa_3|}}, \quad a_2 = \frac{K_0}{\sqrt{|\varkappa_1 \varkappa_2|}} \quad j_\mu = \frac{K_\mu}{\sqrt{|\varkappa_2 \varkappa_3|}}. \tag{64}$$

La solution générale « onde plane » du système est alors

$$\begin{aligned} J_\mu(u) &= \frac{\lambda_1 K_\mu}{\sqrt{|\varkappa_2 \varkappa_3|}} \operatorname{sn}\left(\lambda_2 u + \xi_0, \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) \\ I_1(u) &= \frac{\lambda_1 K_0}{\sqrt{|\varkappa_1 \varkappa_3|}} \operatorname{cn}\left(\lambda_2 u + \xi_0, \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) \\ I_2(u) &= \frac{\lambda_2 K_0}{\sqrt{|\varkappa_1 \varkappa_2|}} \operatorname{dn}\left(\lambda_2 u + \xi_0, \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right). \end{aligned} \tag{65}$$

Si nous posons alors

$$\begin{aligned} &\lambda_2 K_0 = K'_0, \qquad \lambda_2 K_\mu = K'_\mu, \\ &v = \lambda_2 u = \lambda_2 K_\mu x^\mu = K'_\mu x^\mu = K'_0 \tau \\ &k = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \lambda \sqrt{|\varkappa_3|}, \end{aligned} \tag{66}$$

cette onde plane s'écrit encore

$$\begin{aligned} J_\mu(v) &= \frac{\lambda}{\sqrt{|\varkappa_2|}} K \quad \operatorname{sn}\left(v + \xi_0, \lambda \sqrt{|\varkappa_3|}\right), \\ I_1(v) &= \frac{\lambda}{\sqrt{|\varkappa_1|}} K'_0 \operatorname{cn}\left(v + \xi_0, \lambda \sqrt{|\varkappa_3|}\right), \\ I_2(v) &= \frac{K'_0}{\sqrt{|\varkappa_1 \varkappa_2|}} \operatorname{dn}\left(v + \xi_0, \lambda \sqrt{|\varkappa_3|}\right). \end{aligned} \tag{67}$$

Sur cette dernière forme on voit comment s'effectue la réduction au cas linéaire. En effet si $\varkappa_3 \to 0$, $k = \lambda \sqrt{|\varkappa_3|} \to 0$.

I_2 se réduit à la constante

$$I_2 = \frac{K'_0}{\sqrt{|\varkappa_1 \varkappa_2|}} \tag{68}$$

et

$$J_\mu(v) \to \frac{\lambda K^\mu}{\sqrt{|\varkappa_2|}} \sin\,(v + \xi_0) \tag{69}$$

$$I_1(v) = \frac{\lambda K'_0}{\sqrt{\varkappa_1}} \cos\,(v + \xi_0)$$

avec

$$v = K'_\mu x^\mu = K'_0 \tau.$$

Le système étudié ci-dessus et ses solutions se généralisent facilement au cas multipériodique.

Nous considérons en adoptant la représentation vectorielle un vecteur J^μ et n invariants, I_1, I_2, ... I_n liés par les $n + 1$ équations aux dérivées partielles du premier ordre ($p = 1, \ldots n$)

$$\begin{aligned} \partial_\mu J^\mu(x^\mu) &= \varkappa_0 I_1 I_2 \ldots I_n \\ \partial_\mu I_1 &= \varkappa_1 I_2 \ldots I_n J_\mu \\ \partial_\mu I_p &= \varkappa_p I_1 \ldots I_{p-1} I_{p+1} \ldots I_n J_\mu. \end{aligned} \tag{70}$$

Les solutions ondes planes s'obtiennent en écrivant que J^μ, I_1, ... I_n sont des fonctions de la variable

$$u = K_\mu x^\mu$$

alors

$$\partial_\mu = K_\mu \frac{\partial}{\partial u}.$$

Ceci nous conduit à poser

$$J_\mu(u) = j_\mu \varphi_0(u), \quad I_p(u) = a_p \varphi_p(u). \tag{71}$$

J_μ, a_1, ..., a_p, ... a_n sont des constantes.

La méthode générale précédente nous conduit à déterminer les fonctions $\varphi_0(u)$, ..., $\varphi_p(u)$, ... par le système

$$\begin{aligned} \varphi'_0(u) &= \varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_n \\ \varphi'_p(u) &= -\varphi_0 \varphi_1 \ldots \varphi_{p-1} \varphi_{p+1} \ldots \varphi_n, \\ &(p = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned} \tag{72}$$

Les constantes j_μ, a_1, ..., a_n s'obtiennent alors à partir des relations

$$\begin{aligned} K_\mu j^\mu &= \varkappa_0 a_1 \ldots a_n \\ K_\mu a_p &= -\varkappa_p a_1 \ldots a_{p-1} a_{p+1} \ldots a_n j_\mu. \end{aligned} \tag{73}$$

La recherche des solutions de ce système conduit aux conditions

$$\varkappa_0 > 0, \qquad \varkappa_p = -|\varkappa_p|, \qquad (p = 1, \ldots n). \tag{74}$$

On obtient alors

$$j_\mu = \frac{1}{K_0}\left(\frac{K_0^2 \varkappa_0^{n-2}}{|\varkappa_1 \varkappa_2 \ldots \varkappa_n|}\right)^{\frac{1}{2n-2}} K_\mu, \tag{75}$$

$$a_p = \sqrt{\frac{|\varkappa_p|}{\varkappa_0}}\left(\frac{K_0^2 \varkappa_0^{n-2}}{|\varkappa_1 \varkappa_2 \ldots \varkappa_n|}\right)^{\frac{1}{2n-2}}.$$

7. Équations d'ondes non linéaires représentant des corpuscules de spin $\hbar$. — Nous pouvons également construire dans notre théorie des équations généralisant le système ordinaire décrivant les particules de spin $\hbar$.

Ces équations s'écrivent dans le cas linéaire

a) En notation vectorielle

$$\partial_\mu J_\nu - \partial_\nu J_\mu = \varkappa_1 F_{\mu\nu}, \qquad \partial_\nu F^{\mu\nu} = \varkappa_2 J^\mu \tag{76}$$

en introduisant un vecteur J^μ et un tenseur antisymétrique du second ordre $F^{\mu\nu}$.

b) En notation spinorielle

$$\partial_{l\dot{q}} J^{\dot{q}}_{m} + \partial_{m\dot{q}} J^{\dot{q}}_{l} = 2\varkappa_1 F_{\underline{lm}}, \qquad (77)$$

$$\partial_{l\dot{q}} F^{\dot{q}\dot{m}} = \varkappa_2 J^{\dot{m}}_{l},$$

en introduisant un spineur du second rang symétrique $F_{\underline{lm}}$ et un spineur du second rang $J_l^{\dot{m}}$. Dans notre schéma ces systèmes sont susceptibles de deux généralisations :

1° Une généralisation conservant le type spinoriel ou tensoriel.

Celle-ci s'écrit en notation vectorielle en introduisant à côté du vecteur J^μ deux tenseurs antisymétriques du second ordre $F_{\mu\nu}$ et $G_{\mu\nu}$ liés par les équations

$$\partial_\mu J_\nu - \partial_\nu J_\mu = \varkappa_1 (F_\mu{}^\rho G_{\rho\nu} - F_\nu{}^\rho G_{\rho\mu}),$$

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \varkappa_2 G^\mu{}_\rho J^\rho, \qquad (78)$$

$$\partial_\nu G^{\mu\nu} = \varkappa_3 F^\mu{}_\rho J^\rho.$$

Sous forme spinorielle le spineur $J^{\dot{m}}_l$ sera lié à *deux* spineurs symétriques du second rang $F_{\underline{lm}}$ et $G_{\underline{lm}}$ par les équations

$$\partial_{l\dot{q}} J^{\dot{q}}_{m} + \partial_{m\dot{q}} J^{\dot{q}}_{l} = \varkappa_1 (F_{\underline{lq}} G^{q}{}_{\underline{m}} + F_{\underline{mq}} G^{q}{}_{\underline{l}})$$

$$\partial_{l\dot{q}} F^{\dot{q}\dot{m}} = \varkappa_2 G_{\underline{lp}} J^{p\dot{m}} \qquad (79)$$

$$\partial_{l\dot{q}} G^{\dot{q}\dot{m}} = \varkappa_3 F_{\underline{lp}} J^{p\dot{m}}.$$

La recherche des solutions ondes planes de ces systèmes s'effectue suivant notre méthode générale. Considérons la représentation vectorielle, nous posons

$$J_\mu = j_\mu f_1(u), \qquad F_{\mu\nu} = f_{\mu\nu} f_2(u), \qquad (80)$$

$$G_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} f_3(u),$$

les fonctions f_1, f_2, f_3 sont solutions de notre système général.

Les vecteurs et tenseurs constants j_μ, $f_{\mu\nu}$ et $g_{\mu\nu}$ sont déterminés par le système

$$K_\mu j_\nu - K_\nu j_\mu = \varkappa_1 (f_\mu{}^\rho g_{\rho\nu} - f_\nu{}^\rho g_{\rho\mu}),$$

$$K_\nu f^{\mu\nu} = -\varkappa_2 g^\mu{}_\rho j^\rho, \qquad (81)$$

$$K_\nu g^{\mu\nu} = -\varkappa_3 f^\mu{}_\rho j^\rho.$$

La condition de Lorentz $\partial_\mu J^\mu = 0$ du système classique (76) est ici remplacée par les conditions

$$F^{\mu\nu}(\partial_\mu J_\nu) = 0 \quad \text{et} \quad G^{\mu\nu}(\partial_\mu J_\nu) = 0$$

qui sont identiquement satisfaites.

2° Une seconde généralisation semble beaucoup plus intéressante. Elle permet de considérer les équations linéaires des corpuscules de spin 0 et de spin $\hbar$ comme deux dégénérescences d'un même système non linéaire.

Nous introduisons un champ général caractérisé du point de vue tensoriel par un invariant I, un vecteur J^μ, un tenseur antisymétrique du second ordre $F^{\mu\nu}$. Ces trois grandeurs sont liées par les équations

$$\partial_\mu J_\nu - \partial_\nu J_\mu = \varkappa_1 I F_{\mu\nu},$$

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \varkappa_2 I J^\mu, \qquad (82)$$

$$\partial_\mu I = \varkappa_3 F_{\mu\nu} J^\nu.$$

On a encore ici

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \qquad (83)$$

car en multipliant la 2e équation par ∂_μ on est conduit à

$$\varkappa_2 I \partial_\mu J^\mu = 0.$$

Pour $\varkappa_3 = 0$ on a $I = C^{te} = I_0$ le système (82) dégénère et se ramène au système des équations du corpuscule de spin $\hbar$ (76).

Pour $\varkappa_2 = 0$ et $F_{\mu\nu} = C^{te} = f_{\mu\nu}$, posant

$$S_\mu = f_{\mu\nu} J^\nu$$

le système se réduit à

$$\partial_\mu I = \varkappa_3 S_\mu$$

$$\partial_\mu S^\mu = \varkappa_1 (f^{[\mu\nu]} f_{[\mu\nu]}) I \qquad (84)$$

ou encore

$$\Box I = \varkappa_1 \varkappa_3 f^{[\mu\nu]} f_{[\mu\nu]} I. \qquad (85)$$

On retrouve les équations du corpuscule de spin 0 pour $\varkappa_1 \varkappa_3 f^{[\mu\nu]} f_{[\mu\nu]} < 0$.

Nous obtenons facilement les solutions ondes planes de (82) en écrivant

$$I = I(u) = I_0 f_1(u)$$

$$J_\mu = J_\mu(u) = j_\mu f_2(u) \qquad (86)$$

$$F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}(u) = f_{\mu\nu} f_3(u),$$

f_1, f_2, f_3 étant liés par les relations

$$f'_1 = \varepsilon_1 f_2 f_3, \quad f'_2 = \varepsilon_2 f_1 f_3, \quad f'_3 = \varepsilon_3 f_1 f_2, \qquad (87)$$

avec

$$\varepsilon_i = +1, \quad \varepsilon_j = \varepsilon_k = -1 \quad (i, j, k = 1, 2, 3).$$

Les constantes I_0, j_μ, $f_{\mu\nu}$ sont alors déterminées par les équations

$$K_\mu j_\nu - K_\nu j_\mu = \varepsilon_1 \varkappa_1 I_0 f_{\mu\nu}$$

$$K_\nu f^{\mu\nu} = \varepsilon_2 \varkappa_2 I_0 j^\mu, \qquad (88)$$

$$K_\mu I_0 = \varepsilon_3 \varkappa_3 f_{\mu\nu} j^\nu$$

et

$$K_\mu j^\mu = 0.$$

On trouve immédiatement la condition

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varkappa_1 \varkappa_2 < 0$$

et

$$K_0^2 = |\varkappa_1 \varkappa_2| I_0^2.$$

La dernière équation donne immédiatement

$$\varepsilon_1 \varkappa_1 I_0^2 = \varepsilon_3 \varkappa_3 j_\mu j^\mu.$$

De même les deux dernières équations donnent la relation

$$K_0^2 = - \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varkappa_2 \varkappa_3 j_\mu j^\mu.$$

Si le vecteur j_μ est du genre temps soit $j_\mu j^\mu > 0$, nous obtenons le système de conditions

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varkappa_1 \varkappa_2 < 0, \quad \varepsilon_1 \varepsilon_3 \varkappa_1 \varkappa_3 > 0, \quad \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varkappa_2 \varkappa_3 < 0. \tag{89}$$

Si nous considérons par exemple le choix $\varepsilon_1 = +1$, $\varepsilon_2 = -1$, $\varepsilon_3 = -1$, les constantes $\varkappa$ seront assujetties aux conditions

$$\varkappa_1 \varkappa_2 > 0, \quad \varkappa_2 \varkappa_3 < 0, \quad \varkappa_1 \varkappa_3 < 0, \tag{90}$$

qui pourront être satisfaites soit par $\varkappa_1 > 0$, $\varkappa_2 > 0$, $\varkappa_3 < 0$, ou par $\varkappa_1 < 0$, $\varkappa_2 < 0$, $\varkappa_3 > 0$.

On a alors

$$K_0^2 = |\varkappa_1 \varkappa_2| I_0^2,$$

$$j_\mu j^\mu = \frac{1}{|\varkappa_2 \varkappa_3|} K_0^2 = \frac{|\varkappa_1|}{|\varkappa_3|} I_0^2. \tag{91}$$

Supposant les conditions précédentes réalisées nous nous donnerons un vecteur du genre temps constant j_μ tel que

$$K_\mu j^\mu = 0, \qquad j_\mu j^\mu = \frac{K_0^2}{|\varkappa_2 \varkappa_3|}.$$

Nous en déduisons

$$I_0 = K_0 / \sqrt{|\varkappa_1 \varkappa_2|}, \tag{92}$$

$$f_{\mu\nu} = \frac{\varepsilon_1 \sqrt{|\varkappa_1 \varkappa_2|}}{\varkappa_1 K_0} (K_\mu j_\nu - K_\nu j_\mu).$$

Avec le choix $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 = -1$, $\varepsilon_3 = -1$, $\varkappa_1 > 0$, $\varkappa_2 > 0$, $\varkappa_3 = -|\varkappa_3|$ nous obtenons les fonctions ondes planes

$$J_\mu = \lambda_1 j_\mu \,\mathrm{sn}\left(\lambda_2 u, \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right),$$

$$I = \frac{\lambda_2 K_0}{\sqrt{\varkappa_1 \varkappa_2}} \,\mathrm{dn}\left(\lambda_2 u, \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right), \tag{93}$$

$$F_{\mu\nu} = \frac{\lambda_1 \sqrt{\varkappa_1 \varkappa_2}}{\varkappa_1 K_0} (K_\mu j_\nu - K_\nu j_\mu) \,\mathrm{cn}\left(\lambda_2 u, \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right).$$

Mais K_0 est jusqu'ici arbitraire. Nous pouvons alors redéfinir u en écrivant

$$\lambda_2 u = \lambda_2 K_\mu x^\mu = K'_\mu x^\mu = v \tag{94}$$

en posant

$$\lambda_2 K_0 = K'_0.$$

De même nous redéfinirons un vecteur constant j'_μ par $j'_\mu = \sqrt{\varkappa_2}\, \lambda_1 j_\mu$, arbitraire sous les conditions

$$K'_\mu j'^\mu = 0, \quad j'_\mu j'^\mu = \lambda^2 K_0^2, \tag{95}$$

avec

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \lambda \sqrt{|\varkappa_3|}.$$

Alors la solution onde plane complète considérée s'écrit

$$I = \frac{K'_0}{\sqrt{\varkappa_1 \varkappa_2}} \,\mathrm{dn}\,(v, \lambda \sqrt{|\varkappa_3|}),$$

$$J_\mu = \frac{j'_\mu}{\sqrt{\varkappa_2}} \,\mathrm{sn}\,(v, \lambda \sqrt{|\varkappa_3|}), \tag{96}$$

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{K'_0 \sqrt{\varkappa_1}} (K'_\mu j'_\nu - K'_\nu j'_\mu) \,\mathrm{cn}\,(v, \lambda \sqrt{|\varkappa_3|}).$$

λ et K'_0 sont ici arbitraires ainsi que j'_μ sous les conditions (95).

Le système non linéaire considéré ici peut être interprété comme réunissant en un champ unique le champ de spin $\hbar$ électromagnétique ou mésique vectoriel et le champ mésique de spin 0. Le choix particulier des signes ci-dessus définit une solution qui peut être considérée comme voisine de celle du champ de spin $\hbar$, celle-ci subsistant seule dans la dégénérescence $\lambda \sqrt{|\varkappa_3|} = 0$ qui réduit le système au cas linéaire.

Le choix des signes $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = -1$, $\varepsilon_2 = +1$, conduirait à une solution voisine du spin 0 et se réduisant à celui-ci pour $\varkappa_2 = 0$.

8. Équations d'ondes non linéaires représentant les corpuscules de spin $\hbar/2$.

— Nous allons maintenant examiner de plus près la possibilité de généralisation des particules de spin $\hbar/2$. Nous allons donc chercher une généralisation de la théorie de Dirac, c'est-à-dire chercher à construire une théorie faisant intervenir au moins deux spineurs de rang 1 de la forme ξ^{l}.

Nous voyons immédiatement qu'il ne peut y avoir de systèmes de *trois* spineurs ξ^{l}, η^{l}, ζ^{l} liés par des équations du type précédent.

On ne peut en effet construire de système tels que

$$\partial^{l}_{\dot m} \xi^{\dot m} = \varkappa (\eta \zeta)^{l}.$$

On voit alors immédiatement que, si l'on ne veut utiliser que des spineurs de van der Waerden du type ξ^{l} on ne peut avoir de solutions ondes planes représentées par des fonctions multipériodiques que si l'on considère au moins quatre spineurs.

Soient

$$\overset{(1)}{\xi}{}^{l}, \qquad \overset{(2)}{\xi}{}^{l}, \qquad \overset{(3)}{\xi}{}^{l}, \qquad \overset{(4)}{\xi}{}^{l},$$

ces spineurs. Nous désignerons par (a), (b), (c), (d) une permutation de 1, 2, 3, 4.

Le système le plus simple que nous pouvons écrire est alors

$$\partial_{\dot m}^{l} \overset{(a)}{\xi}{}^{\dot m} = \varkappa_a \Big[\big(\overset{(b)}{\xi}{}^{q} \overset{(c)}{\xi}_{q} \pm \overset{(b)}{\xi}{}^{\dot q} \overset{(c)}{\xi}_{\dot q}\big) \overset{(d)}{\xi}{}^{l} + \big(\overset{(c)}{\xi}{}^{q} \overset{(d)}{\xi}_{q} \pm \overset{(c)}{\xi}{}^{\dot q} \overset{(d)}{\xi}_{\dot q}\big) \overset{(b)}{\xi}{}^{l} + \big(\overset{(d)}{\xi}{}^{q} \overset{(b)}{\xi}_{q} \pm \overset{(d)}{\xi}{}^{q} \overset{(b)}{\xi}_{\dot q}\big) \overset{(c)}{\xi}{}^{l}\Big]. \quad (97)$$

Ce système possédera des ondes planes multiplement périodiques (ici triplement périodiques) si nous considérons les spineurs $\overset{(a)}{\xi}{}^{l}$ fonctions de u de la forme

$$\overset{(a)}{\xi}{}^{l}(u) = \overset{(a)}{C}{}^{l} f_a(u) \quad (98)$$

avec

$$f_a' = \varepsilon_a f_b f_c f_d. \quad (99)$$

Les $\overset{(a)}{C}{}^{l}$ seront alors déterminés par l'équation entre constantes

$$K_{\dot m}^{l} \overset{(a)}{C}{}^{\dot m} = \varkappa_a \Big[\big(\overset{(b)}{C}{}^{q} \overset{(c)}{C}_{q} \pm \overset{(b)}{C}{}^{\dot q} \overset{(c)}{C}_{\dot q}\big) \overset{(d)}{C}{}^{l} + [\quad] \overset{(b)}{C}{}^{l} + [\quad] \overset{(c)}{C}{}^{l}\Big] \quad (100)$$

9. **Équations d'ondes non linéaires associant les champs de spin $\hbar/2$, 0 et $\hbar$.** — Nous avons fait l'hypothèse dans l'exemple précédent d'un seul type spinoriel ξ^l. Mais nous pouvons également considérer le cas où deux spineurs ξ^l, η^m seraient associés à un ou plusieurs spineurs de rang supérieur par exemple de l'un des types

$$\zeta^{lm}, \qquad \underset{\smile}{\zeta^{lm}}, \qquad \underline{\zeta^{lm}}.$$

Le cas le plus simple est celui d'un champ du type $\underset{\smile}{\zeta^{lm}}$ correspondant tensoriellement à un invariant ou à un pseudo-invariant. Notre formalisme général nous conduit aux équations

$$\partial_{\dot m}^{l} \xi^{\dot m} = \varkappa_1 \underset{\smile}{\zeta^{lq}} \eta_q,$$

$$\partial_{\dot m}^{l} \eta^{\dot m} = \varkappa_2 \underset{\smile}{\zeta^{lq}} \xi_q, \quad (101)$$

$$\partial_{\dot m}^{l} \underset{\smile}{\zeta^{\dot m \dot p}} = \varkappa_3(\xi^l \eta^{\dot p} \pm \xi^{\dot p} \eta^l).$$

Les solutions périodiques ondes planes si elles existent sont de la forme

$$\xi^{\dot m}(u) = a^{\dot m} f_1(u), \quad \eta^{\dot m}(u) = b^{\dot m} f_2(u), \quad \underset{\smile}{\zeta^{\dot m \dot p}}(u) = \underset{\smile}{c^{\dot m \dot p}} f_3(u) \quad (102)$$

avec

$$f_1' = \varepsilon_1 f_2 f_3, \qquad f_2' = \varepsilon_2 f_1 f_3, \qquad f_3' = \varepsilon_3 f_1 f_2,$$

les constantes $a^{\dot m}$, $b^{\dot m}$, $\underset{\smile}{c^{\dot m \dot p}}$ doivent satisfaire aux relations

$$K_{\dot m}^{l} a^{\dot m} = \varepsilon_1 \varkappa_1 \underset{\smile}{c^{lq}} b_q,$$

$$K_{\dot m}^{l} b^{\dot m} = \varepsilon_2 \varkappa_2 \underset{\smile}{c^{lq}} a_q, \quad (103)$$

$$K_{\dot m}^{l} \underset{\smile}{c^{\dot m \dot p}} = \varepsilon_3 \varkappa_3(a^l b^{\dot p} \pm a^{\dot p} b^l).$$

Par combinaison nous obtenons

$$K_0^2 a^{\dot l} = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varkappa_1 \varkappa_3(\pm)(a^q b_q) b^{\dot l}.$$

Multipliant par $b^{\dot l}$ on en déduit

$$a^{\dot l} b_{\dot l} = 0$$

d'où

$$a^q b_q = 0$$

et par suite $a^{\dot l} = 0$ à moins que l'on ait $\varkappa_1 \varkappa_3 = 0$. De même la seconde équation donnerait $b^{\dot l} = 0$ à moins que $\varkappa_1 \varkappa_3 = 0$.

Ce n'est donc que si $\varkappa_3 = 0$ c'est-à-dire $\underset{\smile}{\zeta^{lm}} = C^{te}$ que le système considéré admet des solutions ondes planes et dans ce cas il se ramène à l'équation de Dirac linéaire usuelle.

L'association de deux spineurs du premier rang ξ^l, η^l et d'un spineur antisymétrique du second rang $\underset{\smile}{\zeta^{lm}}$ ne conduit donc pas à un système possédant des solutions doublement périodiques.

Dans le cas de deux spineurs ξ^l, η^l et d'un spineur symétrique $\underline{\zeta^{lm}}$ nous écrivons les équations

$$\partial_{\dot m}^{l} \xi^{\dot m} = \varkappa_1 \underline{\zeta^{lq}} \eta_q ; \quad \partial_{\dot m}^{l} \eta^{\dot m} = \varkappa_2 \underline{\zeta^{lq}} \xi_q \quad (104)$$

$$\partial_{\dot m}^{l} \underline{\zeta^{\dot m \dot p}} = \varkappa_3(\xi^l \eta^{\dot p} \pm \xi^{\dot p} \eta^l).$$

On montre par un calcul semblable à celui du cas précédent qu'il n'y a *pas de solution* du type onde plane pour ce système à moins que l'on ait $\varkappa_3 = 0$.

Il nous reste à considérer les systèmes associant aux spineurs ξ^l, η^l un vecteur ou pseudo-vecteur $\zeta^{l\dot m}$.

Deux types d'équations sont possibles

a)

$$\partial_{m}^{\dot i} \xi^m = \varkappa_1 \zeta_{q}^{\dot i} \eta^q,$$

$$\partial_{m}^{\dot i} \eta^m = \varkappa_2 \zeta_{q}^{\dot i} \xi^q,$$

$$\partial_{l\dot m} \zeta_{p}^{\dot m} - \partial_{p\dot m} \zeta_{l}^{\dot m} = \varkappa_3(\xi_l \eta_p - \xi_p \eta_l). \quad (105)$$

On peut encore montrer par un calcul moins immédiat que ce système n'admet pas de solution ondes planes sauf dans le cas où $\varkappa_3 = 0$.

b)

$$\partial_{m}^{\dot i} \xi^m = \varkappa_1 \zeta_{p}^{\dot i} \eta^p,$$

$$\partial_{m}^{\dot i} \eta^m = \varkappa_2 \zeta_{p}^{\dot i} \xi^p,$$

$$\partial_{l\dot m} \zeta_{p}^{\dot m} + \partial_{p\dot m} \zeta_{l}^{\dot m} = \varkappa_3(\xi_l \eta_p + \xi_p \eta_l). \quad (106)$$

Nous allons obtenir des expressions complètes pour les solutions ondes planes de ce système. Nous écrirons

$$\xi^m(u) = a^m f_1(u), \quad \eta^m(u) = b^m f_2(u), \quad \zeta_{p}^{\dot m}(u) = c_{p}^{\dot m} f_3(u), \quad (107)$$

les fonctions $f_1(u)$, $f_2(u)$, $f_3(u)$ seront déterminées par le système

$$f_1' = \varepsilon_1 f_2 f_3, \qquad f_2' = \varepsilon_2 f_1 f_3, \qquad f_3' = \varepsilon_3 f_1 f_2$$

$$\varepsilon_i = \varepsilon_j = -1, \quad \varepsilon_k = +1 \quad (i, j, k = 1, 2, 3).$$

Les constantes a^m, b^m, $c_p^{\dot m}$ sont alors déterminées par le système

$$K_m^{\dot l}\, a^m = \varepsilon_1 \varkappa_1\, c_p^{\dot l}\, b^p,$$

$$K_m^{\dot l}\, b^m = \varepsilon_2 \varkappa_2\, c_p^{\dot l}\, a^p, \qquad (108)$$

$$K_{l\dot m}\, c^{\dot m}{}_p + K_{p\dot m}\, c_p^{\dot m} = \varepsilon_3 \varkappa_3 (a_l\, b_p + a_p\, b_l).$$

Ce système se résoud sans difficulté. Supposant $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ réels, on est conduit à la condition

$$\varepsilon_1\, \varepsilon_2\, \varkappa_1\, \varkappa_2 > 0.$$

Ceci nous conduit à deux types d'équations et par suite à deux types de solutions.

1°

$$\varepsilon_1 = +1, \qquad \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -1$$
$$\varkappa_1 = |\varkappa_1|, \qquad \varkappa_2 = -|\varkappa_2| \qquad (\text{ou } \varkappa_1 \varkappa_2 < 0)$$

2°

$$\varepsilon_1 = -1, \qquad \varepsilon_2 = -1, \qquad \varepsilon_3 = +1$$
$$\varkappa_1 = |\varkappa_1|, \qquad \varkappa_2 = |\varkappa_2|.$$

Dans ces deux cas a^m et b^m s'exprimeront au moyen d'un spineur arbitraire soit u^m et l'on aura

$$a^m = \frac{1}{\sqrt{|\varkappa_2|}}\, u^m, \qquad b^m = \frac{1}{\sqrt{|\varkappa_1|}}\, u^m. \qquad (109)$$

Pour $c_p^{\dot m}$ on obtiendra avec $\varepsilon_3 = -1$ pour le premier cas, $\varepsilon_3 = +1$ dans le second cas

$$c_p^{\dot m} = \frac{\varepsilon_3}{\sqrt{|\varkappa_1\, \varkappa_2|}} \left[K^{\dot m q} \frac{u_q\, u_p}{K_0^2} - K_p^{\dot m} \right]. \qquad (110)$$

Les ondes planes complètes s'exprimeront au moyen des solutions (21) pour $\varepsilon_1 = +1$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -1$.

Nous serons encore conduits à redéfinir la masse propre K_0 et la vecteur K_μ (ou le spineur $K_m^{\dot l}$) en posant

$$K_0' = \lambda_2\, K_0, \qquad \lambda_2\, u = K_\mu'\, x^\mu = v,$$

$$K'{}_m^{\dot l} = \lambda_2\, K_m^{\dot l}.$$

Nous poserons $\lambda_1/\lambda_2 = \lambda \sqrt{|\varkappa_3|}$ et le spineur u_m étant arbitraire nous écrirons

$$\lambda_1\, u_m = u_m'.$$

Nous obtenons alors les solutions générales ondes planes du système (106) sous les formes suivantes :

Dans le premier cas $\varepsilon_1 = +1$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -1$:

$$\xi^m = \frac{u'^m}{\sqrt{|\varkappa_2|}} \operatorname{sn}\left(v + \xi_0, \lambda \sqrt{|\varkappa_3|}\right),$$

$$\eta^m = \frac{u_m'}{\sqrt{|\varkappa_1|}} \operatorname{cn}\left(v + \xi_0, \lambda \sqrt{|\varkappa_3|}\right), \qquad (111)$$

$$\zeta_p^{\dot m} = \frac{1}{\sqrt{|\varkappa_1\, \varkappa_2|}} \left(- \varepsilon_{\varkappa_3} \frac{K'^{\dot m q}\, u_q'\, u_p'}{\lambda^2\, K_0'^2} + K'{}_p^{\dot m} \right) \times$$
$$\times \operatorname{dn}\left(v + \xi_0, \lambda \sqrt{|\varkappa_3|}\right),$$

et dans le second cas $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1$, $\varepsilon_3 = +1$:

$$\xi^m = \frac{u'^m}{\sqrt{|\varkappa_2|}} \operatorname{cn}\left(v + \xi_0, \lambda \sqrt{|\varkappa_3|}\right),$$

$$\eta^m = \frac{u'^m}{\sqrt{|\varkappa_1|}} \operatorname{dn}\left(v + \xi_0, \lambda \sqrt{|\varkappa_3|}\right), \qquad (112)$$

$$\zeta_p^{\dot m} = \frac{1}{\sqrt{|\varkappa_2\, \varkappa_1|}} \left(\varepsilon_{\varkappa_3} \frac{K'^{\dot m q}\, u_q'\, u_p'}{\lambda^2\, K'{}_0^2} - K'{}_p^{\dot m} \right) \times$$
$$\times \operatorname{sn}\left(v + \xi_0, \lambda \sqrt{|\varkappa_3|}\right).$$

Ce système peut être interprété comme rassemblant en une entité physique unique les ondes spinorielles ξ^l, η^l décrivant ordinairement l'électron et l'onde $\zeta_p^{\dot m}$ (vecteur ou pseudovecteur) décrivant ordinairement le champ mésique.

La mécanique ondulatoire non linéaire permet donc de construire des modèles unifiant les concepts habituellement séparés de particules et de champs d'interaction.

Manuscrit reçu le 24 février 1959.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Dirac (P. A. M.), *Proc. Roy. Soc.*, 1936, A **155**, 447.
[2] Fierz (M.), *Helvet. Phys. Acta*, 1939, **12**, 3-37.
[3] Petiau (G.), *C. R. Acad. Sc.*, Paris, 1957, **244**, 1890, 1957, 2580, 1957, **245**, 293.
[4] Petiau (G.), *Nuovo Cimento*, 1958, Suppl. **9**, 542-568.
[5] Petiau (G.), *C. R. Acad. Sc.*, Paris, 1958, **246**, 2581.

APPLICATION DES ÉMULSIONS DE FAIBLE SENSIBILITÉ A LA DISCRIMINATION DES IONS LOURDS

Par CH. GEGAUFF et J. P. LONCHAMP (1),
Laboratoire de Physique Corpusculaire, Strasbourg.

Résumé. — On expose l'ensemble des faits expérimentaux démontrant la dualité de structure des traces d'ions lourds.

Le calcul de la perte d'énergie spécifique « primaire » a suggéré une méthode de discrimination entre ions lourds ($Z = 6, 7, 8, 10$ et 18), enregistrés dans des émulsions à faible sensibilité (Ilford K_0, $K — 1$, $K — 2$). Différents critères sont examinés : longueur l de la partie continue, comptage de lacunes en fin de parcours. L'identification est possible à une unité de charge près.

Abstract. — This paper presents a review of all the experimental facts showing that heavy ion tracks in nuclear emulsions are formed of two distinct parts which we call " primary " and " secondary ".

The determination of the specific energy loss of the " primary part " of the track suggests a method of identification of heavy ions ($Z = 6, 7, 8, 10$ and 18) recorded in low sensitivity emulsions (Ilford K_0, $K — 1$, $K — 2$).

Several means of identification are discussed : length without gaps at the end of the track, number of gaps counted from the end of the track. It is possible to identify the ions with an accuracy of one unit of charge.

Structure des traces d'ions lourds dans les émulsions nucléaires sensibles. — L'explication du phénomène d'amincissement des traces des ions de $Z > 2$ vers la fin de leur parcours nous avait amené à rejeter l'hypothèse de Freier [1] attribuant ce phénomène à la diminution du pouvoir ionisant de la particule à la suite de captures électroniques lorsque l'ion était suffisamment ralenti. Nous proposions alors une explication basée sur la densité spatiale des rayons δ de faible énergie, éjectés par le passage de l'ion. Ce point de vue devait logiquement nous amener à postuler une dualité de structure des traces [2]. Celles-ci comportent deux parties que nous appelons « primaire » et « secondaire ». La partie primaire est constituée par les grains effectivement traversés par l'ion incident. La partie secondaire est constituée par les grains situés au voisinage immédiat de la trace primaire et rendus développables par des électrons d'énergie supérieure à un certain seuil, dont nous discuterons ultérieurement la valeur. La partie secondaire peut devenir de plus en plus importante au fur et à mesure que l'on s'éloigne de l'extrémité de la trace, parce que l'énergie maximum des électrons projetés croît assez rapidement avec la vitesse de la particule. Cette dualité de structure peut être confirmée par l'examen des traces enregistrées dans des émulsions nucléaires de sensibilités différentes.

La caractéristique essentielle des émulsions nucléaires est leur sensibilité aux particules et spécialement aux électrons. L'émulsion du type Ilford G_5 enregistre les électrons de toute énergie, sous forme de traces visibles. Le diamètre moyen de ses grains vierges est de 0,27 μ. Il en est de même pour l'émulsion Ilford L_4. Le diamètre moyen de ses grains vierges est de 0.13 μ.

L'émulsion du type Ilford C_2 est moins sensible, elle n'enregistre sous forme de traces visibles que des électrons d'énergie inférieure à 30 keV ; le diamètre moyen de ses grains vierges est de 0.16 μ. La comparaison des figures 1 montre très clairement la différence d'aspect d'un même ion lourd, ion $^{20}_{10}$Ne de 200 MeV d'énergie et de 130 μ de parcours, enregistré respectivement dans une émulsion G_5, L_4 et C_2. On remarquera d'abord que l'épaisseur moyenne est plus faible dans la C_2 et dans la L_4 que dans la G_5, ce qui s'explique en partie par la différence de la taille des grains de ces émulsions.

Dans le tableau I, nous avons représenté l'aug-

Ions ..	$_6$C	$_{10}$Ne	$_{18}$A
$\Delta e_{(100-10)}$ G_5	0,48 μ	0,84 μ	1,60 μ
$\Delta e_{(100-10)}$ L_4	0,34 μ	0,67 μ	1,05 μ
$\Delta e_{(100-10)}$ C_2	0,18 μ	0,33 μ	0,72 μ

mentation d'épaisseur moyenne $\Delta e_{(100-10)}$, c'est-à-dire la différence entre l'épaisseur moyenne à 100 μ de parcours résiduel et l'épaisseur moyenne à 10 μ, pour différents types d'émulsions et différents ions. Les épaisseurs moyennes sont évaluées à partir de 20 traces.

(1) Actuellement Faculté des Sciences de Lyon.

Rappelons que Δe est influencé par le degré de développement et parfois par des fluctuations de sensibilité d'un même type d'émulsion (spécialement pour la G_5).

Néanmoins, les variations qui en résultent sont relativement faibles, ainsi Δe passe de 0.80 μ

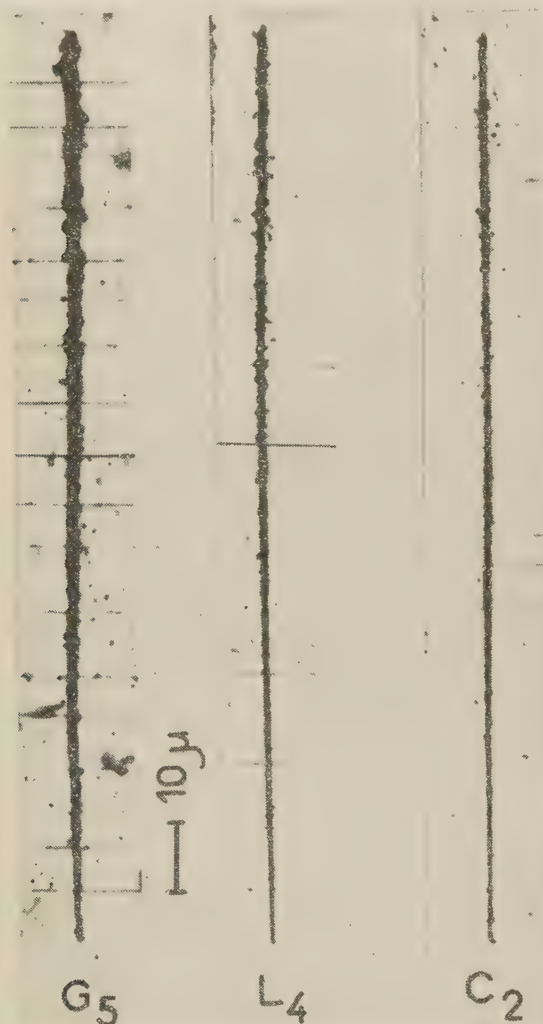


Fig. 1. — $^{20}_{10}$Ne $E = 200$ MeV, $R = 130$ μ.

pour le Ne dans la G_5 développés 20 minutes à l'amidol, à 1.11 μ pour le Ne développé 120 minutes.

Dans tous les cas, Δe est significativement inférieur quand on passe d'une émulsion G_5 à une émulsion L_4, ou à une émulsion C_2, pour un même type d'ion. Nous attribuons cet effet moins à la différence de dimensions des grains qu'à une différence de portée pour des électrons de même énergie dans les émulsions L_4 et G_5 pour lesquelles le diamètre des grains passe du simple au double. En effet, un modèle de répartition des grains dans l'émulsion, l'évaluation statistique de la portée et le parcours des électrons chiffré an nombre de grains rendus développables [3], [4], nous ont permis de montrer qu'il fallait un nombre plus grand d'électrons d'une même énergie, dans le cas de la L_4 que dans le cas de la G_5 pour atteindre leur portée maximum.

Les courbes de la figure 2 représentent l'épaisseur moyenne en fonction de $\beta = V/c$ pour $_6$C enregistré dans les émulsions G_5, L_4 et C_2. A vitesse égale, la différence d'épaisseur entre les traces enregistrées dans la G_5 et la L_4 croît lorsque la vitesse augmente, ce qui confirme nos prévisions quant à la portée. Le calcul du spectre δ pour $_6$C montre que pour $\beta > 0.09$, les électrons de 9 keV et plus apparaissent, mais que leur nombre reste petit de l'ordre de 3 à 4 par μ de parcours. Leur

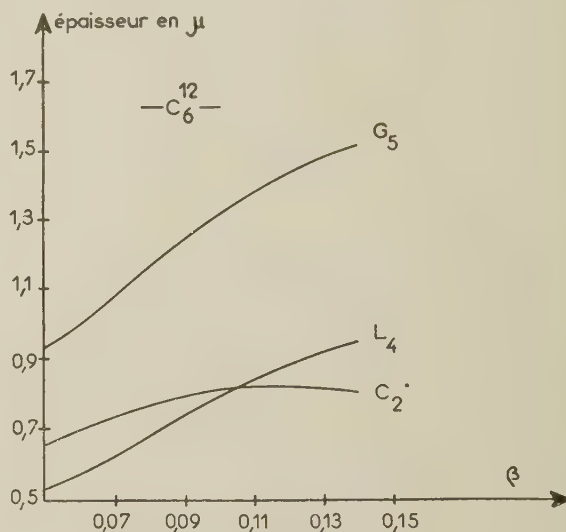


Fig. 2.

efficacité géométrique n'est plus la même pour les deux émulsions. Ce phénomène est plus marqué pour des ions de $Z > 6$ pour lesquels le nombre de δ est plus important.

Dans le cas de l'émulsion C_2, il se surajoute à ce facteur géométrique une moindre sensibilité des grains. La perte d'énergie spécifique initiale des électrons de 9 keV et plus, est faible, de l'ordre de 5 keV/μ et de ce fait, leur efficacité photographique dans l'émulsion C_2 est faible elle aussi comme il résulte des données de Brown [5]. Leur contribution à l'épaisseur de la trace est quasi nulle, contrairement à ce qui se passe dans des émulsions à plus grande sensibilité comme la G_5 et la L_4 dans laquelle leur efficacité photographique est importante. Par contre, le nombre d'électrons d'énergie inférieure à 9 keV décroît lentement, lorsque la vitesse croît à partir de $\beta = 0{,}09$. Ces remarques expliquent qualitativement l'allure des courbes de la figure 2.

Figure 3, nous avons reproduit côte à côte, les microphotographies de deux traces d'ions $^{16}_{8}O$ dans

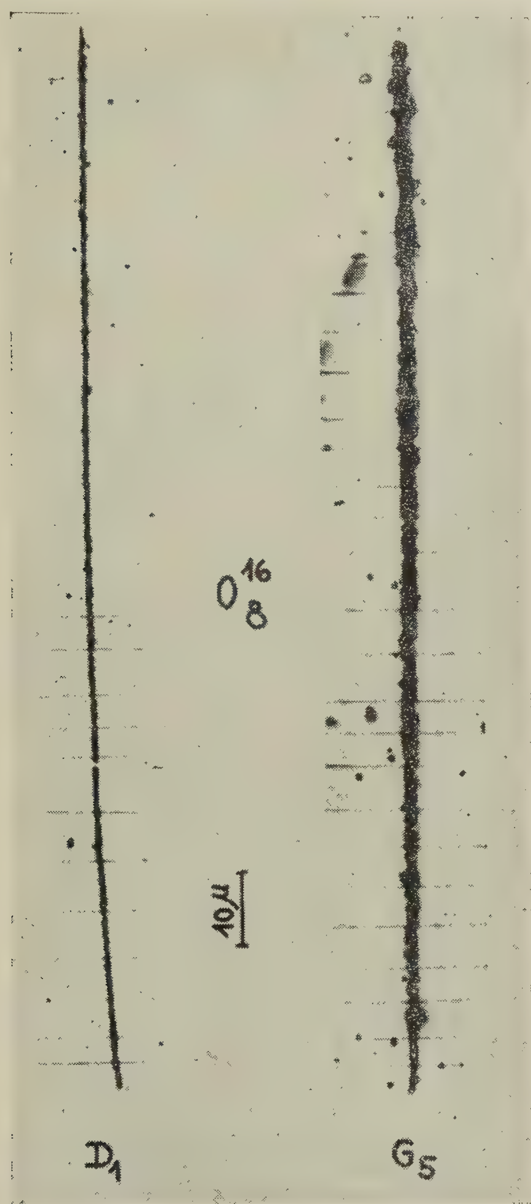


Fig. 3.

une émulsion G_5 et D_1. Pour la G_5 $\Delta e = 0.79$ μ et pour la D_1 $\Delta e = 0.06$ μ. Cette dernière valeur de Δe, s'explique par la très faible sensibilité intrinsèque aux électrons des grains de l'émulsion D_1.

La différence entre partie primaire et secondaire peut encore être démontrée par le sous-développement des traces ou par le développement à l'aide d'un révélateur discriminant. Il paraît raisonnable d'admettre que la période d'induction du développement de l'image latente des grains traversés par la particule incidente, donc des grains de la partie primaire, soit plus courte que celle des grains traversés par les seuls δ. Un sous-développement par dilution et par abaissement de température devrait permettre de saisir ce phénomène, en arrêtant le développement avant l'apparition de la partie secondaire.

Le sous-développement à l'aide de l'amidol ne permet pas d'atteindre ce stade dans des conditions reproductibles. Nous avons choisi un révélateur au glycin pour ces expériences. La figure 4(a) montre une trace de $^{20}_{10}Ne$ dans une G_5 sous-développée au glycin par dilution et abaissement de température. La variation de la dimension transversale est très faible, la partie lacunaire provient essentiellement de la partie primaire de la trace. Par contre, un révélateur à l'oxalate ferreux à potentiel redox élevé (— 225 mV) qui développe sélectivement les germes d'image latente en fonction de leur taille, nous a donné un résultat encore

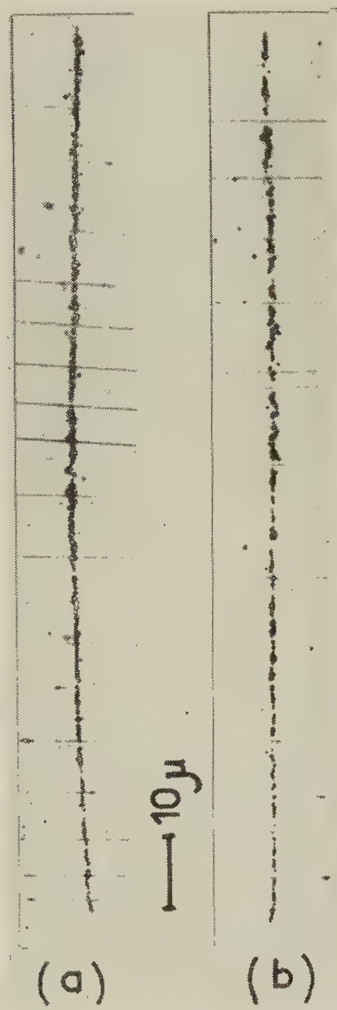


Fig. 4. — $^{20}_{10}Ne$, $E = 200$ MeV, $R = 130$ μ.

plus frappant (voir *fig.* 4*b*) ; la partie primaire de la trace est nettement prépondérante.

Structure des traces d'ions lourds dans les émulsions nucléaires de faible sensibilité. — Les résultats précédents nous ont incités à examiner l'aspect des traces d'ions lourds dans des émulsions pratiquement insensibles aux électrons, du type K_0,

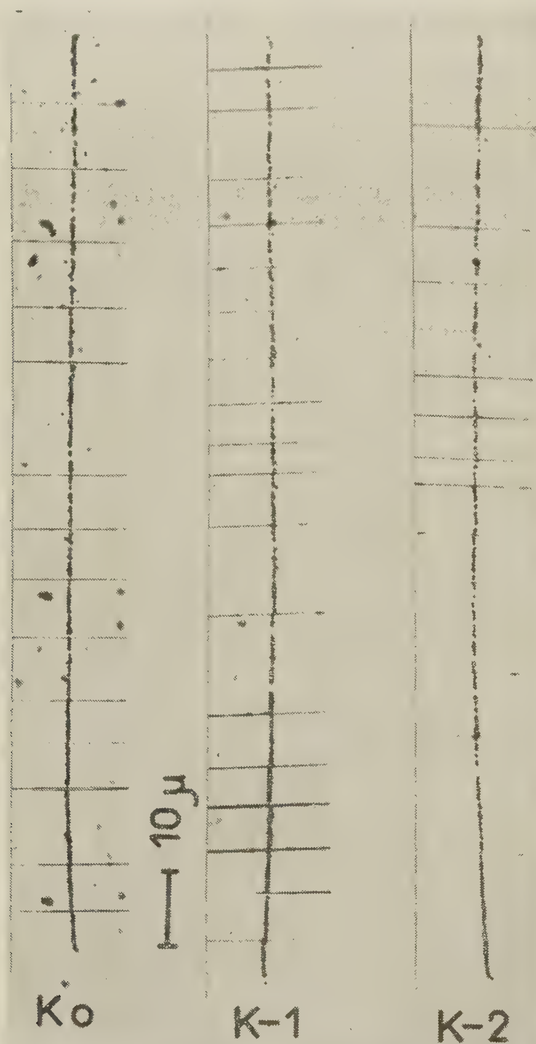


Fig. 5. — ${}^{20}_{10}$Ne, $E = 200$ MeV, $R = 130\ \mu$.

$K - 1$, $K - 2$. Le diamètre moyen des grains vierges de ces émulsions est de 0.2 μ. Leur sensibilité, indiquée par la perte d'énergie nécessaire pour rendre un grain développable, va en diminuant de K_0 à $K - 2$. Si nos hypothèses sont exactes, on devrait s'attendre à la disparition totale de la partie secondaire de la trace, due aux électrons δ. La figure 5 montre un exemple des résultats obtenus. Il s'agit d'ions ${}^{20}_{10}$Ne enregistrés respectivement dans de l'émulsion K_0, $K - 1$ et $K - 2$, et développées à l'amidol. On constate que la trace est lacunaire à son entrée dans l'émulsion, que la densité des grains croît régulièrement et que les grains finissent par devenir jointifs, la partie terminale de la trace étant continue. Cet aspect rappelle celui des traces dues aux particules légères. L'allure de la variation de la granularité est certainement liée à la variation de la perte d'énergie spécifique dE/dx.

a) Évaluation des pertes d'énergie spécifique. — Le dE/dx total peut être calculé, d'une part à partir des relations parcours-énergie expérimentales par dérivation graphique des courbes, opération assez délicate, et d'autre part à partir du dE/dx d'un proton de même vitesse en multipliant cette valeur par le carré de la charge efficace de l'ion à la vitesse considérée. Nous utilisons les valeurs de Z efficace proposées par Papineau [6] pour $Z \leqslant 10$.

Cette perte d'énergie ne contribue pas intégralement à l'ionisation dans la partie primaire de la trace. En effet, une partie de l'énergie dissipée est communiquée à des électrons qui acquièrent une énergie suffisante pour provoquer de l'ionisation en dehors du domaine de la trace primaire. Phénoménologiquement, on peut dire que les électrons recevant une faible énergie, c'est-à-dire la grande majorité, ne provoquent de l'ionisation que dans la trace primaire, alors que les électrons recevant une grande énergie ($E \geqslant 5$ keV) ne cèdent qu'une partie très faible de leur énergie dans la partie primaire. L'ionisation due aux électrons d'énergie intermédiaire se partage entre la partie primaire et la partie secondaire de la trace. Ce phénomène de partage étant continu, il est arbitraire de fixer des limites à ces énergies électroniques. Il semble assez raisonnable d'admettre au vu des relations parcours-énergie et énergie-grains développés [5] que des électrons d'énergie $E < 2$ keV ne contribuent qu'à former la trace primaire. En adoptant cette limite, on sous-estime légèrement la perte d'énergie spécifique que nous appelons primaire. Si nous adoptons la limite $E < 5$ keV, on risque de la surestimer. Désignons par η, la limite choisie pour le transfert d'énergie. La probabilité d'avoir un transfert d'énergie compris entre Q et $Q + \mathrm{d}Q$ a une section efficace différentielle de

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{2\pi z^2}{mv^2} \frac{e^4\, \mathrm{d}Q}{Q^2}$$

le calcul de cette section est légitime dans la mesure où η est grand par rapport aux énergies de liaison des électrons atomiques ; ceux-ci peuvent alors être considérés comme libres. Par ailleurs, η ne doit pas être trop grand par rapport aux dimensions atomiques, de sorte que la particule chargée incidente puisse être considérée comme ponctuelle.

Par intégration de $d\sigma$ sur tous les transferts possibles, on obtient la perte d'énergie par chocs $Q > \eta$:

$$dE/dx_{Q>\eta} = \frac{2\pi z^2 e^4 NZ}{mv^2} \text{Log} \frac{2 mv^2}{\eta}.$$

NZ représente le nombre d'électrons par cm³ du milieu traversé ; z la charge efficace de l'ion incident.

La différence entre dE/dx total et $dE/dx_{Q>\eta}$ donne dE/dx primaire. Dans le cas de l'émulsion nucléaire Ilford :

$$\frac{dE}{dx_{Q>\eta}} = 0.061 \frac{z^2}{\beta^2} \log_{10} \frac{2 mv^2}{\eta}$$

dE/dx est exprimé en keV/μ. Dans le cas du $^{20}_{10}Ne$, on a représenté les pertes d'énergie en keV/μ en fonction de l'énergie en MeV (*fig.* 6).

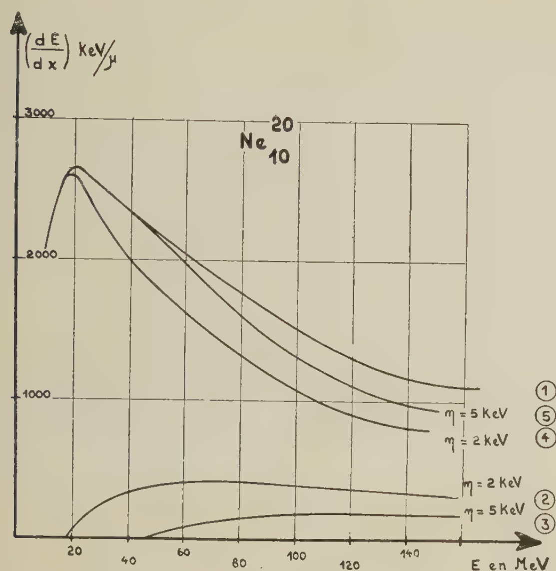


Fig. 6.

courbe (1) dE/dx total, courbe (2) $dE/dx_{Q>2\text{keV}}$ courbe (3) $dE/dx_{Q>5\text{keV}}$;

courbe (4) dE/dx primaire avec la limite $\eta = 2$ keV ;

courbe (5) dE/dx primaire avec la limite $\eta = 5$ keV.

On observe sur ces courbes que le dE/dx primaire diffère peu du dE/dx total et que l'influence du choix de la limite η est peu important.

Nous avons utilisé ce calcul du dE/dx primaire pour examiner les possibilités de discrimination entre ions lourds de types différents dans les émulsions à faible sensibilité. Différentes grandeurs sont liées à cette perte d'énergie : la densité des grains, des amas de grains, ou des lacunes ; la distribution des longueurs des amas, ou des lacunes. Chacune de ces grandeurs peut théoriquement servir à identifier la nature de la particule incidente. Il convient de rechercher celle qui apparaît comme la plus satisfaisante.

b) Application a la discrimination. — Dans une phase préliminaire, nous nous sommes attachés à rechercher un paramètre facile à évaluer. La longueur l de la partie terminale continue nous a semblé pouvoir constituer ce paramètre.

On remarque sur les courbes figure 7. que la variation de dE/dx primaire est très rapide, ce qui laisse prévoir une localisation assez nette du début de cette partie continue.

En fait, l'examen d'un très grand nombre de traces, à l'aide du microscope nous a montré qu'il était difficile de trouver un critère reproductible pour fixer le début de cette partie continue. La

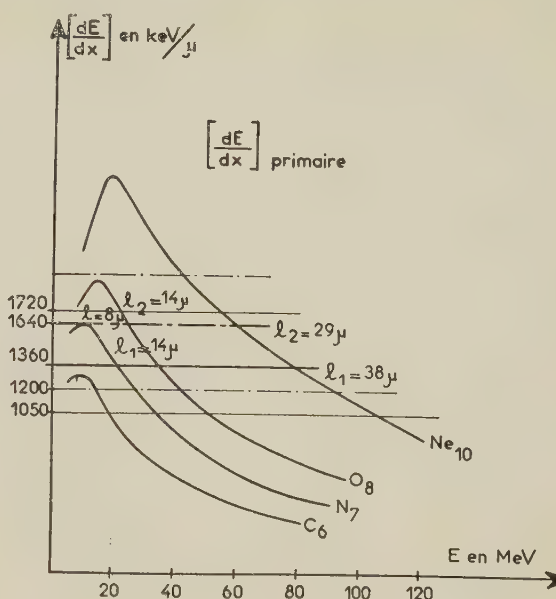


Fig. 7.

longueur des amas croît assez régulièrement, et il paraît préférable de choisir comme critère l'apparition de la première lacune de longueur supérieure à 0,5 μ. Ce critère est sensible au degré de développement et au degré d'effacement spontané (fading) qui peut devenir important pour ce type d'émulsion. Les mesures effectuées sur deux lots de plaques exposées et traitées séparément ont confirmé ces hypothèses.

La première série de ces plaques a donné les résultats suivants :

$_{10}Ne$ $l = 38{,}3$ μ $\pm$ 6 μ représentent la moyenne de 150 mesures avec une déviation standard $\sigma = 6$ μ. En reportant cette valeur sur la courbe (1) de la figure 7, on constate que le début de la longueur continue correspond à un dE/dx primaire de 1 360 keV/μ. La base de l'histogramme est

très grande, indiquant de grosses fluctuations. Elle s'étend de $l = 25\ \mu$ [dE/dx prim = 1 720 keV/μ] à $l = 55\ \mu$ [dE/dx prim = 1 050 keV/μ]

Ces valeurs reportées sur les courbes de la figure 7 permettent les prévisions suivantes :

Pour $_7$N $l = 14\ \mu$.
Pour $_6$C $l = 0$ avec des fluctuations de l allant jusqu'à $l = 11\ \mu$.

Les mesures expérimentales ont donné les résultats suivants :

Pour $_7$N $l = 11{,}4\ \mu \pm 3\ \mu$.
Pour $_6$C $l = 0$ en moyenne.

La deuxième série de plaques a donné des valeurs différentes :

$_{10}$Ne $l = 28{,}7\ \mu \pm 5\ \mu$ ce qui correspond à dE/dx primaire de 1 640 keV/μ.

La base de l'histogramme très large elle aussi s'étend de $l = 19\ \mu$ [dE/dx prim = 1 960 keV/μ] à $l = 44\ \mu$ [dE/dx prim = 1 200 keV/μ]

Ces valeurs permettent les prévisions suivantes :

Pour $_8$O $l = 14\ \mu$.
Pour $_7$N $l = 8\ \mu$.
Pour $_6$C $l = 0$ avec des fluctuations allant jusqu'à $l = 9\ \mu$.

Les mesures expérimentales ont donné les résultats suivants :

Pour $_8$O $l = 10{,}7\ \mu$.
Pour $_7$N $l = 7{,}7\ \mu$.
Pour $_6$C $l = 0$ avec des fluctuations allant jusqu'à $l = 9\ \mu$

Pour $_{18}$A, le dE/dx primaire à 320 MeV, c'est-à-dire 80 μ de parcours résiduel est de : 2 376 keV/μ. Quelques traces d'argon trouvé dans ces émulsions nous ont permis de vérifier la prévision $l \geqslant 80\ \mu$.

Ces valeurs sont à nouveau en concordance avec les prévisions théoriques, mais diffèrent des premières. Ceci peut s'explique par une différence de développement et par des variations de sensibilité de la plaque d'une part, et d'autre part, par le choix du critère qui n'est pas suffisamment objectif.

Les émulsions $K - 1$ et $K - 2$ ont donné des résultats peu reproductibles.

Ces résultats nous ont amené à choisir un paramètre moins difficile à définir : le comptage du nombre de lacunes. Nous comptons toutes les lacunes, quelles que soient leurs dimensions par cellules de différentes longueurs dont l'origine coïncide avec la fin de la trace dans l'émulsion. Les résultats relatifs à l'émulsion K_0 sont présentés sous formes de courbes.

La courbe (*fig.* 8) représente le nombre moyen de lacunes en fonction de la longueur de la cellule pour $_6$C, $_8$O et $_{10}$Ne. Les points relatifs à chaque Z s'alignent sur 3 droites, qui sont pratiquement parallèles. On voit d'après ces courbes qu'il est inutile d'augmenter la taille des cellules, la discrimination ne s'améliore pas. Les deux lots de plaques que nous avons mentionnés précédemment ont donné des résultats comparables.

Sur la courbe (*fig.* 9) nous avons représenté le nombre de lacunes en fonction de Z pour des cellules de taille croissante. La déviation standard σ de la distribution du nombre de lacunes est représentée sur la courbe.

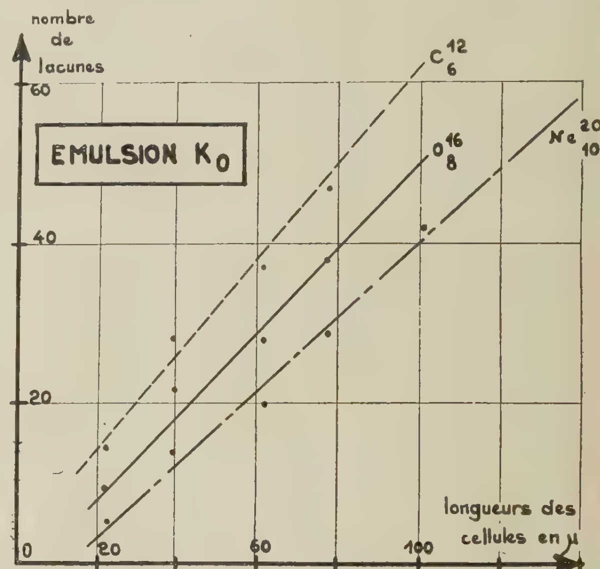


Fig. 8.

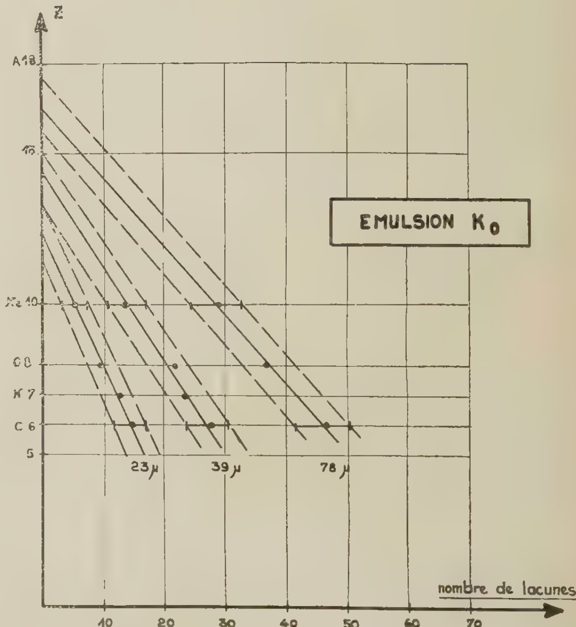


Fig. 9.

En extrapolant la droite correspondant à la cellule de 78 μ, nous voyons que $n = 0$ pour $Z \geqslant 16$. Un certain nombre de traces d'argon $Z = 18$, de 95, à 100 μ de parcours dans cette émulsion K_0, nous ont permis de vérifier cette extrapolation.

Cet ensemble de courbes permet à l'expéri-

mentateur de discriminer les ions dans ce domaine de charge avec une incertitude d'une unité. On voit que 23 μ de parcours constituent une longueur suffisante pour discriminer des ions de $Z < 12$. Si l'expérimentateur a des longueurs de traces supérieures à sa disposition, il peut identifier des Z de valeur plus élevée.

Des comptages sur des cellules de longueur croissantes par exemple : 23, 39 et 78 μ, permettent par recoupement de réduire l'incertitude sur Z.

Les résultats obtenus par la même méthode à l'aide d'émulsion $K - 2$ sont moins satisfaisants. La séparation entre les différents Z est moins bonne. La diminution de sensibilité de la $K - 2$ par rapport à la K_0 ne se traduit pas forcément par une augmentation du nombre de lacunes, mais probablement par une augmentation de la longueur des lacunes. Ce serait alors ce paramètre qui devrait être examiné.

Quelques comptages de lacunes sur l'émulsion $K - 1$ ont donné des résultats fort peu différents de ceux obtenus sur K_0.

Il reste évidemment à évaluer de façon quantitative, l'influence du degré de développement sur ces critères de discrimination.

Conclusion. — L'utilisation des émulsions à grande sensibilité en vue de la discrimination des ions lourds a fait l'objet de nombreux travaux [2], [7], [8].

Ce travail montre l'intérêt de l'utilisation des émulsions de faible sensibilité. Les domaines intéressants de Z ne sont pas les mêmes dans les deux cas. Ce point fera l'objet d'une publication ultérieure.

Ce travail a été exécuté au Laboratoire de Physique Corpusculaire de Strasbourg. Nous tenons à remercier vivement M. le Pr Cüer pour l'intérêt qu'il a bien voulu témoigner à ce travail. Nous exprimons notre très vive gratitude à M. le Pr Barkas de l'Université de Berkeley et à ses collaborateurs MM. H. Heckmann et F. Smith qui ont assuré l'irradiation des émulsions au Hilac. Nous remercions le Commissariat à l'Énergie Atomique pour son aide matérielle.

Manuscrit reçu le 20 mai 1959.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Freier (P.), Oppenheimer (F.) et al., *Phys. Rev.*, 1948, **74**, 213 ; *Phys. Rev.*, 1950, **74**, 1818.

[2] Cuer (P.), *Sc. et Ind. Phot.*, 1947, **18**, 321. Lonchamp (J. P.), *J. Physique Rad.*, 1953, **14**, 433. Gegauff (Ch.) et Lonchamp (J. P.) (2e Colloque International de Photographie Corpusculaire, Montréal, 1958, sous presse). Cuer (P.), Gegauff (Ch.) et Lonchamp (J. P.), *C. R. Acad. Sc.*, 1958, **247**, 1758.

[3] Lonchamp (J. P.) et Gegauff (Ch.), *J. Physique Rad.*, 1956, **17**, 132.

[4] Gegauff (Ch.), *Thèse*, Strasbourg, 1959.

[5] Brown (R.), Camerini (V.), Fowler (P. H.) et Alt., *Nature*, 1949, **163**, 47.

[6] Papineau (A.), *C. R. Acad. Sc.*, 1956, **242**, 2933 et communication privée.

[7] Bizetti (P. G.) et Della Corte (M.), *Nuovo Cimento*, 1959, **XI**, 317.

[8] Skjeggestad (O.), *Nuovo Cimento*, 1958, **VIII**, 927.

MÉCANIQUE STATISTIQUE D'UN PLASMA LORENTZIEN INHOMOGÈNE ET ANISOTROPE : ÉTUDE DE LA DISTRIBUTION ÉLECTRONIQUE

Par Raymond JANCEL et Théo KAHAN
Institut Henri-Poincaré, C. N. R. S., Paris.

Résumé. — En s'appuyant sur les résultats de la 1re partie (1), on donne explicitement le système d'équations permettant de calculer les termes d'ordre zéro et d'ordre un du développement de la fonction de distribution. Ces résultats sont étendus au cas d'un champ électrique extérieur oscillant, en cherchant des solutions stationnaires par un développement en série de Fourier, superposé au développement en fonctions sphériques. Enfin, on indique les problèmes physiques relevant de ces méthodes de calcul.

Abstract. — Based on the results obtained in the first paper (1), the authors give explicitly the system of equations allowing calculation of the terms of zero order, as well as the terms of order one, of the expansion of the distribution function. For an external oscillating electric field, a stationnary solution is obtained by a Fourier analysis superimposed upon the expansion in spherical harmonics. The earlier results are generalized to this case. Physical problems which can be dealt with by these methods are indicated.

6. **Équations générales du premier ordre.** — Nous allons appliquer le développement précédent au calcul des termes d'ordre zéro et un du développement de f_e et nous utiliserons à cet effet l'équation générale (4.1) en nous réservant de montrer par la suite que les résultats que nous obtiendrons sont également valables pour un champ magnétique d'orientation quelconque. Faisons successivement dans (4.1) $l = 0$, $m = 0$; puis $l = 1$, avec $m = \pm 1$ et 0. Il vient pour $l = m = 0$:

$$\frac{\partial \alpha_0^0}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[D(1,-1)\, V_e^2 \left(\frac{\partial \alpha_1^{-1}}{\partial x} - i\frac{\partial \alpha_1^{-1}}{\partial y}\right) - F(1,1)\, V_e^2\left(\frac{\partial \alpha_1^1}{\partial x} + i\frac{\partial \alpha_1^1}{\partial y}\right)\right] + V_e^2\, B(1,0)\frac{\partial \alpha_1^0}{\partial z}$$
$$+ \frac{1}{V_e}\left\{\frac{1}{2}\left[(\Gamma_x - i\Gamma_y)\, V_e^2\, D(1,-1)\frac{\partial \alpha_1^{-1}}{\partial V_e} - (\Gamma_x + i\Gamma_y)\, V_e^2\, F(1,1)\frac{\partial \alpha_1^1}{\partial V_e}\right] + \Gamma_z\, V_e^2\, B(1,0)\frac{\partial \alpha_1^0}{\partial V_e}\right\}$$
$$+ 3\left[\frac{\Gamma_x - i\Gamma_y}{2} D(1,-1)\,\alpha_1^{-1} - \frac{\Gamma_x + i\Gamma_y}{2} F(1,1)\,\alpha_1^1 + \Gamma_z\, B(1,0)\,\alpha_1^0\right] = J_{I.L.}(\alpha_0^0). \tag{6.1}$$

D'après les formules (9) de l'appendice, on a d'autre part :

$$D(1,-1) = F(1,1) = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad \text{et} \quad B(1,0) = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{\partial \alpha_0^0}{\partial t} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\, V_e^2\left[\left(\frac{\partial \alpha_1^{-1}}{\partial x} - \frac{\partial \alpha_1^1}{\partial x}\right) - i\left(\frac{\partial \alpha_1^1}{\partial y} + \frac{\partial \alpha_1^{-1}}{\partial y}\right)\right]$$
$$+ V_e^2\sqrt{\frac{1}{3}}\frac{\partial \alpha_1^0}{\partial z} + \frac{1}{V_e}\left\{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\, V_e^2\left[\Gamma_x\left(\frac{\partial \alpha_1^{-1}}{\partial V_e} - \frac{\partial \alpha_1^1}{\partial V_e}\right) - i\,\Gamma_y\left(\frac{\partial \alpha_1^{-1}}{\partial V_e} + \frac{\partial \alpha_1^1}{\partial V_e}\right)\right] + \sqrt{\frac{1}{3}}\, V_e^2\,\Gamma_z\frac{\partial \alpha_1^0}{\partial V_e}\right\}$$
$$+ 3\left\{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\left[\Gamma_x(\alpha_1^{-1} - \alpha_1^1) - i\,\Gamma_y(\alpha_1^{-1} + \alpha_1^1)\right] + \sqrt{\frac{1}{3}}\,\Gamma_z\,\alpha_1^0\right\} = J_{I.L.}(\alpha_0^0). \tag{6.2}$$

On voit apparaître dans les parenthèses les expressions figurant dans (5.18), de sorte que l'on obtient, par simplification, l'équation correspondant à $l = m = 0$:

$$\frac{\partial f_e^{(0)}}{\partial t} + \frac{V_e^2}{3}\operatorname{div}_r \boldsymbol{f}_e^{(1)} + \frac{V_e}{3}\boldsymbol{\Gamma}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{f}_e^{(1)}}{\partial V_e} + \boldsymbol{\Gamma}\cdot\boldsymbol{f}_e^{(1)} = J_{\mathrm{I.L.}}(f_e^{(0)}) \tag{6.3}$$

qui, mise sous une forme condensée, s'écrit :

$$\frac{\partial f_e^{(0)}}{\partial t} + \frac{V_e^2}{3}\operatorname{div}_r \boldsymbol{f}_e^{(1)} + \frac{1}{3\, V_e^2}\frac{d}{dV_e}\left(V_e^3\,\boldsymbol{\Gamma}\cdot\boldsymbol{f}_e^{(1)}\right) = J_{\mathrm{I.L.}}(f_e^{(0)}) \tag{6.3'}$$

De même, les équations relatives à $l = 1$, $m = \pm 1$, 0 s'écrivent :

a) $l = m = 1$

$$\frac{\partial \alpha_1^1}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[-C(0,0)\left(\frac{\partial \alpha_0^0}{\partial x} - i\frac{\partial \alpha_0^0}{\partial y}\right)\right] + \frac{1}{2\, V_e}(\Gamma_x - i\,\Gamma_y)\left(-C(0,0)\frac{\partial \alpha_0^0}{\partial V_e}\right) + i\,\omega_B\,\alpha_1^1 + \nu_1\,\alpha_1^1 = 0 \tag{6.4a}$$

(1) Voir la 1re partie : *J. Physique Rad.*, 1959, **20**, 35.

b) $l = 1, m = -1$

$$\frac{\partial \alpha_1^{-1}}{\partial t} + \frac{1}{2} E(0, 0)\left(\frac{\partial \alpha_0^0}{\partial x} + i \frac{\partial \alpha_0^0}{\partial y}\right) + \frac{1}{2 V_e}(\Gamma_x + i \Gamma_y) E(0, 0) \frac{\partial \alpha_0^0}{\partial V_e} - i \omega_B \alpha_1^{-1} + \nu_1 \alpha_1^{-1} = 0 \quad (6.4b)$$

c) $l = 1, m = 0$

$$\frac{\partial \alpha_1^0}{\partial t} + A(0, 0) \frac{\partial \alpha_0^0}{\partial z} + \frac{1}{V_e} \Gamma_z A(0, 0) \frac{\partial \alpha_0^0}{\partial V_e} + \nu^1 \alpha_1^0 = 0. \quad (6.4c)$$

Pour faire apparaître les combinaisons des α de (5.18), on remplace les équations (6.4*a*) et (6.4*b*) par celles obtenues en les ajoutant et en les retranchant de manière convenable. Il vient ainsi :

$$\frac{\partial(\alpha_1^{-1} - \alpha_1^1)}{\partial t} + \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\partial \alpha_0^0}{\partial x} + \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\Gamma_x}{V_e} \frac{\partial \alpha_0^0}{\partial V_e} - i \omega_B(\alpha_1^{-1} + \alpha_1^1) + \nu_1(\alpha_1^{-1} - \alpha_1^1) = 0 \quad (6.5a)$$

$$\frac{\partial(\alpha_1^{-1} + \alpha_1^1)}{\partial t} + i \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\partial \alpha_0^0}{\partial y} + i \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\Gamma_y}{V_e} \frac{\partial \alpha_0^0}{\partial V_e} - i \omega_B(\alpha_1^{-1} - \alpha_1^1) + \nu_1(\alpha_1^{-1} + \alpha_1^1) = 0. \quad (6.5b)$$

En tenant compte de (5.18), les équations (6.5*a*), (6.5*b*) et (6.4*c*) prennent la forme suivante :

$$\frac{\partial f_{ex}^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial f_e^{(0)}}{\partial x} + \frac{\Gamma_x}{V_e} \frac{\partial f_e^{(0)}}{\partial V_e} + \omega_B f_{ey}^{(1)} + \nu_1 f_{ex}^{(1)} = 0 \quad (6.6a)$$

$$\frac{\partial f_{ey}^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial f_e^{(0)}}{\partial y} + \frac{\Gamma_y}{V_e} \frac{\partial f_e^{(0)}}{\partial V_e} - \omega_B f_{ex}^{(1)} + \nu_1 f_{ey}^{(1)} = 0 \quad (6.6b)$$

$$\frac{\partial f_{ez}^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial f_e^{(0)}}{\partial z} + \frac{\Gamma_z}{V_e} \frac{\partial f_e^{(0)}}{\partial V_e} + \nu_1 f_{ez}^{(1)} = 0. \quad (6.6c)$$

Ces trois équations peuvent se mettre sous la forme vectorielle condensée :

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}_e^{(1)}}{\partial t} + \nabla_r f_e^{(0)} + \frac{\boldsymbol{\Gamma}}{V_e} \frac{\partial f_e^{(0)}}{\partial V_e} - (\boldsymbol{\omega}_B \wedge \boldsymbol{f}_e^{(1)}) + \nu_1 \boldsymbol{f}_e^{(1)} = 0 \quad (6.7)$$

Cette équation vectorielle ayant été obtenue dans le cas particulier $\boldsymbol{\omega}_B$ parallèle à Oz, il nous reste à vérifier qu'elle reste valable dans le cas général d'une orientation quelconque de $\boldsymbol{\omega}_B$.

Il suffit pour cela de remplacer dans les équations précédentes les termes en $im\, \omega_B \alpha_l^m$ par l'expression (3.38) ; on trouve

a) $l = 1, m = 1$

$$(i \omega_{B_x} - \omega_{B_y}) \frac{\alpha_1^0}{2} \sqrt{2} + i \omega_{B_z} \alpha_1^1 \quad (6.8a)$$

b) $l = 1, m = -1$

$$-(\omega_{B_y} - i \omega_{B_x}) \frac{\alpha_1^0}{2} \sqrt{2} - i \omega_{B_z} \alpha_1^{-1} \quad (6.8b)$$

c) $l = 1, m = 0$

$$(i \omega_{B_x} + \omega_{B_y}) \frac{\alpha_1^{-1}}{2} \sqrt{2} - (\omega_{B_y} - i \omega_{B_x}) \frac{\alpha_1^1}{2} \sqrt{2}. \quad (6.8c)$$

On remplace, comme précédemment, les équations (6.8*a*) et (6.8*b*) par leur somme et leur différence et l'on fait apparaître les composantes de $\boldsymbol{f}_e^{(1)}$ (d'après (5.18)) pour trouver en définitive :

$$\left.\begin{matrix} \omega_{B_z} f_{ey}^{(1)} - \omega_{B_y} f_{ez}^{(1)} \\ \omega_{B_x} f_{ez}^{(1)} - \omega_{B_z} f_{ex}^{(1)} \\ \omega_{B_y} f_{ex}^{(1)} - \omega_{B_x} f_{ey}^{(1)} \end{matrix}\right\} = -(\boldsymbol{\omega}_B \wedge \boldsymbol{f}_e^{(1)}). \text{ (c q. f. d.)} \quad (6.9)$$

Nous aboutissons ainsi au système suivant de 4 équations

$$\frac{\partial f_e^{(0)}}{\partial t} + \frac{V_e^2}{3} \nabla_r \cdot \boldsymbol{f}_e^{(1)} + \frac{1}{3 V_e^2} \frac{d}{d V_e}(V_e^3 \boldsymbol{\Gamma} \cdot \boldsymbol{f}_e^{(1)} = J_{I.L}(f_e^{(0)})) \quad (6.10)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}_e^{(1)}}{\partial t} + \nabla_r f_e^{(0)} + \frac{\boldsymbol{\Gamma}}{V_e} \frac{\partial f_e^{(0)}}{\partial V_e} - (\boldsymbol{\omega}_B \wedge \boldsymbol{f}_e^{(1)}) + \nu_1 \boldsymbol{f}_e^{(1)} = 0.$$

Ce système permet de calculer en principe les 2 premières approximations de la fonction de distribution électronique du plasma considéré.

7. Résolution de l'équation de Boltzmann en présence d'un champ électrique alternatif et d'un champ magnétique constant.

— Dans le cas où l'on a affaire à un champ électrique *oscillant* que nous écrirons $\boldsymbol{\Gamma} \cos \omega t$, l'équation de Boltzmann revêt la forme suivante :

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + \boldsymbol{V}_e \cdot \nabla_r f_e + [\boldsymbol{\Gamma} \cos \omega t + (\boldsymbol{\omega}_B \wedge \boldsymbol{V}_e)] \cdot \vec{\nabla}_{V_e} f_e = J(f_e) \quad (7.1)$$

où $\boldsymbol{\Gamma}$ est indépendant du temps. Pour résoudre cette équation on utilise le développement en harmoniques sphériques (2.1) ; dans ce développement les α_l^m sont fonctions du temps et il est naturel, étant donné la variation sinusoïdale du champ électrique, de développer ces α_l^m en série de Fourier ; nous poserons donc :

$$\alpha_l^m(\boldsymbol{r}, V_e, t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_{kl}(\boldsymbol{r}, V_e)\, e^{ik\omega t} \quad (7.2)$$

où, d'après la relation (2.4) et la condition de réalité des coefficients de la série de Fourier, on a :

$$\alpha_{\overline{kl}}^{\,\overline{m}} = (-1)^m \alpha_{-kl}^{m*}. \quad (7.3)$$

D'après (7.2), la fonction f_e revêt la forme suivante :

$$f_e(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{V}_e, t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{m=+l} \alpha_{kl}^m(\boldsymbol{r}, V_e)\, Y_l^m(V_e, \theta, \varphi)\, e^{ik\omega t}. \quad (7.4)$$

En portant le développement (7.4) dans (7.1) et en identifiant terme à terme ainsi que nous l'avons

fait précédemment, on obtient une équation générale qui permet de calculer les fonctions inconnues α_{kl}^m. Nous allons établir cette équation en nous appuyant sur les résultats obtenus dans le calcul des α_l^m.

D'une manière générale on pourra remplacer simplement α_l^m par α_{kl}^m toutes les fois où l'opérateur-temps n'agit pas sur f_e ; c'est le cas pour les termes $V_e.\vec{\nabla}_r f_e$, $(\omega_B \wedge V_e)\vec{\nabla}_e f_e$ et $J(f_e)$. On a donc immédiatement pour ces termes, d'après (2.23), (3.19), (3.31) et (3.38) :

$$J(f_e) = J\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty}\sum_{m=-l}^{+l}\alpha_{kl}^m Y_l^m e^{ik\omega t}\right)$$

qui peut s'écrire en vertu de la linéarité de l'opérateur J :

$$J(f_e) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J(\alpha_{k0}^0\, Y_0^0)\, e^{ik\omega t} \tag{7.5}$$
$$+ \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=1}^{+\infty}\sum_{m=-l}^{+l} J(\alpha_{kl}^m\, Y_l^m)\, e^{ik\omega t}$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_{\mathrm{I.L}}(\alpha_{k_0}^0\, Y_0^0)\, e^{ik\omega t} - \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=1}^{+\infty}\sum_{m=-l}^{+l} \nu_l\, \alpha_{kl}^m\, Y_l^m\, e^{ik\omega t};$$

puis :

$$V_e.\vec{\nabla}_r f_e = \sum_{k,l,m} Y_l^m e^{ikwt} \times$$
$$\Big\{\frac{1}{2}\Big[-C(l-1, m-1)\left(\frac{\partial\alpha_{k,l-1}^{m-1}}{\partial x} - i\frac{\partial\alpha_{k,l-1}^{m-1}}{\partial y}\right)$$
$$+ D(l+1, m-1)\, V_e^2\left(\frac{\partial\alpha_{k,l+1}^{m-1}}{\partial x} - i\frac{\partial\alpha_{k,l+1}^{m-1}}{\partial y}\right)$$
$$+ E(l-1, m+1)\left(\frac{\partial\alpha_{k,l-1}^{m+1}}{\partial x} + i\frac{\partial\alpha_{k,l-1}^{m+1}}{\partial y}\right)$$
$$- F(l+1, m+1)\, V_e^2\left(\frac{\partial\alpha_{k,l+1}^{m+1}}{\partial x} + i\frac{\partial\alpha_{k,l+1}^{m+1}}{\partial y}\right)\Big]$$
$$+ A(l-1, m)\frac{\partial\alpha_{k,l-1}^m}{\partial z} + V_e^2\, B(l+1, m)\frac{\partial\alpha_{k,l+1}^m}{\partial z}\Big\}. \tag{7.6}$$

De même, si ω_B est parallèle à Oz :

$$(\omega_B \wedge V_e).\nabla_{Ve} f_e = i\,\omega_B \sum_{k,l,m} m\alpha_{k,l}^m\, Y_l^m\, e^{ik\omega t} \tag{7.7}$$

et si l'orientation de ω_B est quelconque

$$(\omega_B \wedge V_e).\nabla_{Ve} f_e = \sum_{k,l,m} Y_l^m e^{ik\omega t}$$
$$\Big\{(i\omega_{B_x} + \omega_{B_y})\frac{\alpha_{k,l}^{m-1}}{2}\sqrt{(l+m)(l-m+1)}$$
$$- (\omega_{B_y} - i\,\omega_{B_x})\frac{\alpha_{k,l}^{m+1}}{2}\sqrt{(l-m)(l+m+1)} \tag{7.8}$$
$$+ i\,\omega_{B_z}\, m\,\alpha_{k,l}^m\Big\}.$$

Reste les deux termes où figure l'opérateur temps ; pour $\frac{\partial f_e}{\partial t}$ le résultat est immédiat et on a :

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} = i\,\omega \sum_{k,l,m} k\alpha_{k,l}^m\, Y_l^m\, e^{ik\omega t}; \tag{7.9}$$

D'autre part le terme en $\boldsymbol{\Gamma}\cos\omega t$ s'écrit

$$\boldsymbol{\Gamma}\cos\omega t\,\vec{\nabla}_{Ve}\left(\sum_{k,l,m}\alpha_{k,l}^m\, Y_l^m\, e^{ik\omega t}\right). \tag{7.10}$$

Comme l'opérateur $\boldsymbol{\Gamma}.\nabla_{Ve}$ est indépendant du temps, (7.10) peut s'écrire :

$$\frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}\sum_k e^{ik\omega t}\Big\{\boldsymbol{\Gamma}.\nabla_{Ve}\sum_{l,m}\alpha_{k,l}^m\, Y_l^m)\Big\}. \tag{7.11}$$

Le crochet de (7.11) a été calculé et figure dans (3.22), (3.26) et (3.27) ; on a donc :

$$\boldsymbol{\Gamma}.\nabla_{Ve}\left(\sum_{l,m}\alpha_{k,l}^m\, Y_l^m\right) \equiv W_k' + W_k'' \tag{7.12}$$

avec

$$W_k' = \sum_{l,m}\frac{Y_l^m}{V_e}\Big\{\frac{1}{2}\Big[(\Gamma_x - i\,\Gamma_y)\Big(-\frac{\partial\alpha_{k,l-1}^{m+1}}{\partial V_e}C(l-1, m-1)$$
$$+ V_e^2\frac{\partial\alpha_{k,l+1}^{m-1}}{\partial V_e}D(l+1, m-1)\Big)$$
$$+ (\Gamma_x + i\,\Gamma_y)\Big(\frac{\partial\alpha_{k,l-1}^{m+1}}{\partial V_e}E(l-1, m+1) \tag{7.13}$$
$$- V_e^2\frac{\partial\alpha_{k,l+1}^{m+1}}{\partial V_e}F(l+1, m+1)\Big)\Big]$$
$$+ \Gamma_z\Big(\frac{\partial\alpha_{k,l-1}^m}{\partial V_e}A(l-1, m) + V_e^2\frac{\partial\alpha_{k,l+1}^m}{\partial V_e}B(l+1, m)\Big)\Big\}$$

$$W_k'' = \sum_{l,m}(2l+3)\, Y_l^m\Big[\frac{\Gamma_x - i\,\Gamma_y}{2}D(l+1, m-1)\,\alpha_{k,l+1}^{m-1}$$
$$-\frac{\Gamma_x + i\Gamma_y}{2}F(l+1, m+1)\frac{\alpha_{k,l+1}^{m+1}}{2} + \Gamma_z\, B(l+1, m)\,\alpha_{k,l+1}^m\Big] \tag{7.14}$$

Il reste à effectuer la sommation par rapport à l'indice k, ce qui peut s'écrire :

$$\sum_k\frac{e^{i(k+1)\omega t} + e^{i(k-1)\omega t}}{2}(W_k' + W_k'') \quad \text{ou}$$
$$\sum_k e^{ik\omega t}\left[\frac{W_{k-1}' + W_{k+1}'}{2} + \frac{W_{k-1}'' + W_{k+1}''}{2}\right]. \tag{7.15}$$

Établissons maintenant l'équation générale pour ω_H parallèle à Oz ; on a, d'après (7.5), (7.6), (7.7), (7.9), (7.13), (7.14) et (7.15), l'équation suivante :

$$ik\omega\,\alpha_{k,l}^m + \Big\{\frac{1}{2}\Big[-C(l-1, m-1)\left(\frac{\partial\alpha_{k,l-1}^{m-1}}{\partial x} - i\frac{\partial\alpha_{k,l-1}^{m-1}}{\partial y}\right)$$
$$+ D(l+1, m-1)\, V_e^2\left(\frac{\partial\alpha_{k,l+1}^{m-1}}{\partial x} - i\frac{\partial\alpha_{k,l+1}^{m-1}}{\partial y}\right)$$
$$+ E(l-1, m+1)\left(\frac{\partial\alpha_{k,l-1}^{m+1}}{\partial x} + i\frac{\partial\alpha_{k,l-1}^{m+1}}{\partial y}\right)$$
$$- F(l+1, m+1)\, V_e^2\left(\frac{\partial\alpha_{k,l+1}^{m+1}}{\partial x} + i\frac{\partial\alpha_{k,l+1}^{m+1}}{\partial y}\right)\Big]$$
$$+ A(l-1, m)\frac{\partial\alpha_{k,l-1}^m}{\partial z} + V_e^2\, B(l+1, m)\frac{\partial\alpha_{k,l+1}^m}{\partial z}\Big\}$$

$$+\frac{1}{2\,V_e}\left\{\frac{\Gamma_x - i\,\Gamma_y}{2}\left[-\,C(l-1,\ m-1)\times\left(\frac{\partial\alpha^{m-1}_{k-1,l-1}}{\partial V_e}+\frac{\partial\alpha^{m-1}_{k+1,l-1}}{\partial V_e}\right)\right.\right.$$

$$\left.+\,D(l+1,\ m-1)\ V_e^2\left(\frac{\partial\alpha^{m-1}_{k-1,l+1}}{\partial V_e}+\frac{\partial\alpha^{m-1}_{k+1,l+1}}{\partial V_e}\right)\right]$$

$$+\frac{\Gamma_x + i\Gamma_y}{2}\left[E(l-1, m+1)\left(\frac{\partial\alpha^{m+1}_{k-1,l-1}}{\partial V_e}+\frac{\partial\alpha^{m+1}_{k+1,l-1}}{\partial V_e}\right)\right.$$

$$\left.-\,F(l+1,\ m+1)\ V_e^2\left(\frac{\partial\alpha^{m+1}_{k-1,l+1}}{\partial V_e}+\frac{\partial\alpha^{m+1}_{k+1,l+1}}{\partial V_e}\right)\right]$$

$$+\,\Gamma_z\left[A(l-1,\ m)\left(\frac{\partial\alpha^{m}_{k-1,l-1}}{\partial V_e}+\frac{\partial\alpha^{m}_{k+1,l-1}}{\partial V_e}\right)\right. \qquad (7.16)$$

$$\left.\left.+\,B(l+1,\ m)\ V_e^2\left(\frac{\partial\alpha^{m}_{k-1,l+1}}{\partial V_e}+\frac{\partial\alpha^{m}_{k+1,l+1}}{\partial V_e}\right)\right]\right\}$$

$$+\frac{2l+3}{2}\left[\frac{\Gamma_x - i\,\Gamma_y}{2}D(l+1, m-1)\left(\alpha^{m-1}_{k-1,l+1}+\alpha^{m-1}_{k+1,l+1}\right)\right.$$

$$-\frac{\Gamma_x + i\,\Gamma_y}{2}F(l+1,\ m+1)\left(\alpha^{m+1}_{k-1,l+1}+\alpha^{m+1}_{k+1,l+1}\right)$$

$$\left.+\,\Gamma_z\,B(l+1,\ m)\left(\alpha^{m}_{k-1,l+1}+\alpha^{m}_{k+1,l+1}\right)\right]$$

$$+\,im\,\omega_B\,\alpha^m_{k,l} = \begin{cases} J_{\mathrm{I.L}}(\alpha^0_{k0}) & \text{si}\quad l = 0\\ \text{ou}\quad -\,\nu_l\,\alpha^m_{k,l} & \text{pour}\quad l \geqslant 1.\end{cases}$$

8. **Cas général du développement de f_e sous forme tensorielle.** — En opérant comme au paragraphe 5, on mettra f_e sous la forme tensorielle :

$$f_e = \sum_{l=0}^{\infty}\mathcal{A}^{(l)} : \mathcal{Y}^{(l)} = \sum_{l=0}^{\infty}\mathcal{H}^{(l)} : \mathcal{V}^{(l)}. \qquad (8.1)$$

Développons maintenant les tenseurs sphériques $\mathcal{A}^{(l)}$ et $\mathcal{H}^{(l)}$ en série de Fourier ; il vient :

$$\mathcal{A}^{(l)} \equiv \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\mathcal{A}^{(l)}_k\,e^{ik\omega t} \qquad (8.2)$$

$$\mathcal{H}^{(l)} \equiv \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\mathcal{F}^{(l)}_k \cos k\omega t + \mathcal{G}^{(l)}_k \sin k\omega t\right). \qquad (8.3)$$

On définit ainsi un ensemble de tenseurs sphériques, de degré $(2l+1)$, $\mathcal{A}^{(l)}_k$, $\mathcal{F}^{(l)}_k$, $\mathcal{G}^{(l)}_k$ associés à chaque valeur de k. Le développement (8.1) se mettra dès lors sous la forme :

$$f_e = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik\omega t}\left(\mathcal{A}^{(l)}_k : \mathcal{Y}^{(l)}\right) \qquad (8.4)$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\mathcal{F}^{(l)}_k \cos k\omega t + \mathcal{G}^{(l)}_k \sin k\omega t\right) : \mathcal{V}^{(l)}.$$

Le tenseur $\mathcal{A}^{(l)}_k$ étant défini par l'ensemble des coefficients $\alpha^m_{k,l}$, les tenseurs réels $\mathcal{F}^{(l)}_k$ et $\mathcal{G}^{(l)}_k$ s'exprimeront par des combinaisons linéaires de ces coefficients. En utilisant la relation (7.3) satisfaite par les $\alpha^m_{k,l}$, on vérifie que le terme général du développement (8.1) s'écrit (avec $m \neq 0$) :

$$\alpha^m_{k,l}\,e^{ik\omega t} + \alpha^m_{-k,l}\,e^{-ik\omega t})\ Y^l_m$$

$$+\left(\alpha^{-m}_{\bar{k},l}\,e^{ik\omega t} + \alpha^{-m}_{-\bar{k},l}\,e^{-ik\omega t}\right)\ Y_l^{-m}$$

$$= \frac{V_e^l\ \Theta_l^m}{\sqrt{2\pi}}\left\{\cos k\omega t\cos m\varphi\left(\alpha^m_{k,l} + (-1)^m\,\alpha^{-m*}_{\bar{k},l}\right.\right.$$

$$\left.+\,(-1)^m\,\alpha^{-m}_{\bar{k},l} + \alpha^{m*}_{k,l}\right) +$$

$$\sin k\omega t \sin m\varphi\left((-1)^m\,\alpha^{-m*}_{\bar{k},l} + (-1)^m\,\alpha^{-m}_{\bar{k},l} - \alpha^{m}_{k,l} - \alpha^{m*}_{k,l}\right)$$

$$+\,i\cos k\omega t\sin m\varphi\left(\alpha^m_{k,l} + (-1)^m\,\alpha^{-m*}_{\bar{k},l}\right.$$

$$\left.-\,(-1)^m\,\alpha^{-m}_{\bar{k},l} - \alpha^{m*}_{k,l}\right)$$

$$+\,i\sin k\omega t\cos m\varphi\left(\alpha^m_{k,l} - (-1)^m\,\alpha^{-m*}_{\bar{k},l}\right.$$

$$\left.\left.+\,(-1)^m\,\alpha^{-m}_{\bar{k},l} - \alpha^{m*}_{k,l}\right)\right\}. \qquad (8.5)$$

Cette relation détermine 4 combinaisons linéaires des $\alpha^m_{k,l}$, $\alpha^{-m}_{\bar{k},l}$, $\alpha^m_{k,l}{}^*$, $\alpha^{-m}_{\bar{k},l}{}^*$ qui correspondent aux coefficients réels du développement. D'après (5.10) le tenseur $\mathcal{V}^{(l)}$ s'écrit

$$\mathcal{V}^{(l)} \to \left(Y^0_l,\quad \frac{Y^m_l + (-1)^m\ Y_l^{-m}}{2} \equiv \frac{V_e^l\,\Theta_l^m}{\sqrt{2\pi}}\cos m\varphi,\right.$$

$$\left.\frac{Y^m_l - (-1)^m\ Y_l^{-m}}{2i} \equiv \frac{V^e_l\,\Theta_l^m}{\sqrt{2\pi}}\sin m\varphi\right)$$

de sorte que $\mathcal{F}^{(l)}_k$ et $\mathcal{G}^{(l)}_k$ ont pour composantes, dans cette représentation,

$$\mathcal{F}^{(l)}_k \to \begin{pmatrix} \alpha^0_{k,l} + \alpha^{0*}_{k,l}\,, \\ \left(\alpha^m_{k,l} + (-1)^m\,\alpha^{-m*}_{\bar{k},l} + (-1)^m\,\alpha^{-m}_{\bar{k},l} + \alpha^{m*}_{k,l}\right), \\ i\left(\alpha^m_{k,l} + (-1)^m\,\alpha^{-m*}_{\bar{k},l} - (-1)^m\,\alpha^{-m}_{\bar{k},l} - \alpha^{m*}_{k,l}\right). \end{pmatrix} \qquad (8.6)$$

$$\mathcal{G}^{(l)}_k \to \begin{pmatrix} i\left(\alpha^0_{k,l} - \alpha^{0*}_{k,l}\right), \\ i\left(\alpha^m_{k,l} - (-1)^m\,\alpha^{-m*}_{\bar{k},l} + (-1)^m\,\alpha^{-m}_{\bar{k},l} - \alpha^{m*}_{k,l}\right), \\ (-1)^m\,\alpha^{-m*}_{\bar{k},l} + (-1)^m\,\alpha^{-m}_{\bar{k},l} - \alpha^{m}_{k,l} - \alpha^{m*}_{k,l}. \end{pmatrix} \qquad (8.7)$$

9. **Équations générales du 1er ordre.** — Comme précédemment, nous allons maintenant tirer de l'équation (7.16), les deux premières approximations pour la fonction de distribution électronique. En s'en tenant aux harmoniques sphériques du 1er ordre, la fonction de distribution prend la forme (5.12), soit :

$$f_e = f_e^{(0)} + \boldsymbol{V}_e\cdot\boldsymbol{f}_e^{(1)} \equiv F_0^{(0)} \qquad (9.1)$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(F_k^{(0)}\cos k\,\omega t + G_k^{(0)}\sin k\,\omega t\right)$$

$$+\,\boldsymbol{V}_e\cdot\left\{\boldsymbol{F}_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\boldsymbol{F}_k^{(1)}\cos k\,\omega t + \boldsymbol{G}_k^{(1)}\sin k\,\omega t\right)\right\}$$

où les coefficients réels du développement en série de Fourier sont mis en évidence. En nous bornant

dans la suite à $k \leqslant 1$, le développement (9.1) se réduit à :

$$f_e = F_0^{(0)} + F_1^{(0)} \cos \omega t + G_1^{(0)} \sin \omega t \quad (9.2)$$
$$+ \boldsymbol{V}_e . \boldsymbol{F}_0^{(1)} + \boldsymbol{V}_e . (\boldsymbol{F}_1^{(1)} \cos \omega t + \boldsymbol{G}_1^{(1)} \sin \omega t)$$
$$\equiv f_0^{(0)} + f_1^{(0)} e^{i\omega t} + f_{-1}^{(0)} e^{-i\omega t}$$
$$+ \boldsymbol{V}_e . \boldsymbol{f}_0^{(1)} + \boldsymbol{V}_e . (\boldsymbol{f}_1^{(1)} e^{i\omega t} + \boldsymbol{f}_{-1}^{(1)} e^{-i\omega t}),$$

On obtient par identification :

$$F_0^{(0)} = f_0^{(0)}, \quad \boldsymbol{f}_0^{(1)} = \boldsymbol{F}_0^{(1)}, \quad f_1^{(0)} + f_{-1}^{(0)} = F_1^{(0)},$$
$$i(f_1^{(0)} - f_{-1}^{(0)}) = G_1^{(0)}, \quad \boldsymbol{f}_1^{(1)} + \boldsymbol{f}_{-1}^{(1)} = \boldsymbol{F}_1^{(1)},$$
$$i(\boldsymbol{f}_1^{(1)} - \boldsymbol{f}_{-1}^{(1)}) = \boldsymbol{G}_1^{(1)}, \quad (9.3)$$

où les grandeurs réelles F, G correspondent aux tenseurs $\mathcal{F}_k^{(l)}$ et $\mathcal{G}_k^{(l)}$ définis en (8.6) et (8.7) à un coefficient numérique près défini à partir des Θ_l^m (voir appendice, formules 5).

On obtient en suivant la méthode exposée précédemment au paragraphe 5,

$$\alpha_{00}^0 = 2\sqrt{\pi} f_0^{(0)}, \quad \alpha_{1,0}^0 = 2\sqrt{\pi} f_1^{(0)}, \quad \alpha_{-1,0}^0 = 2\sqrt{\pi} f_{-1}^{(0)}, \quad (9.4)$$

et de même

$$\boldsymbol{f}_0^{(1)} = \begin{cases} -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}(\alpha_{0,1}^1 + \alpha_{0,1}^{1*}) \\ -\frac{i}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}(\alpha_{0,1}^1 - \alpha_{0,1}^{1*}) \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\alpha_{0,1}^0 \end{cases} \quad (9.5)$$

$$\boldsymbol{f}_1^{(1)} = \begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}(\alpha_{1,1}^{-1} - \alpha_{1,1}^1) \\ -\frac{i}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}(\alpha_{1,1}^1 + \alpha_{1,1}^{-1}) \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\alpha_{1,1}^0 \end{cases} \quad (9.6)$$

$$\boldsymbol{f}_{-1}^{(1)} = \begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}(\alpha_{1,1}^{-1*} - \alpha_{1,1}^{1*}) \\ \frac{i}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}(\alpha_{1,1}^{1*} + \alpha_{1,1}^{-1*}) \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\alpha_{1,1}^{0*}. \end{cases} \quad (9.7)$$

En vertu des relations précédentes, les composantes du tenseur (8.6) s'écrivent pour $k = 1$, $l = 1$:

$$\alpha_{1,1}^1 - \alpha_{1,1}^{-1*} - \alpha_{1,1}^{-1} + \alpha_{1,1}^{1*} = -2\sqrt{\frac{2\pi}{3}}(\boldsymbol{f}_1^{(1)} + \boldsymbol{f}_{-1}^{(1)})_x$$
$$i(-\alpha_{1,1}^{1*} + \alpha_{1,1}^{-1} + \alpha_{1,1}^1 - \alpha_{1,1}^{-1*}) = -2\sqrt{\frac{2\pi}{3}}(\boldsymbol{f}_1^{(1)} + \boldsymbol{f}_{-1}^{(1)})_y$$
$$\alpha_{1,1}^0 + \alpha_{1,1}^{0*} = 2\sqrt{\frac{\pi}{3}}(\boldsymbol{f}_1^{(1)} + \boldsymbol{f}_{-1}^{(1)})_z \quad (9.10)$$

De même les composantes de (8.7) ont pour valeur :

$$\alpha_{1,1}^1 + \alpha_{1,1}^{-1*} - \alpha_{1,1}^{-1} - \alpha_{1,1}^{1*} = -2\sqrt{\frac{2\pi}{3}}(\boldsymbol{f}_1^{(1)} - \boldsymbol{f}_{-1}^{(1)})_x$$
$$-i(\alpha_{1,1}^{1*} + \alpha_{1,1}^{-1} + \alpha_{1,1}^1 + \alpha_{1,1}^{-1*}) = 2\sqrt{\frac{2\pi}{3}}(\boldsymbol{f}_1^{(1)} - \boldsymbol{f}_{-1}^{(1)})_y$$
$$\alpha_{1,1}^0 - \alpha_{1,1}^{0*} = 2\sqrt{\frac{\pi}{3}}(\boldsymbol{f}_1^{(1)} - \boldsymbol{f}_{-1}^{(1)})_z. \quad (9.11)$$

Ceci étant, nous allons déduire de l'équation générale les équations du 1er ordre, en suivant une méthode en tous points analogue à celle du paragraphe 6. A partir de l'équation générale (7.16) on trouve pour $l = k = m = 0$

$$\frac{1}{2}\left[D(1,-1)\, V_e^2\left(\frac{\partial\alpha_{0,1}^{-1}}{\partial x} - i\frac{\partial\alpha_{0,1}^{-1}}{\partial y}\right)\right. \quad (9.12)$$
$$\left. - F(1,1)\, V_e^2\left(\frac{\partial\alpha_{0,1}^1}{\partial x} + i\frac{\partial\alpha_{0,1}^1}{\partial y}\right)\right] + V_e^2 B(1,0)\frac{\partial\alpha_{0,1}^0}{\partial z}$$
$$+ \frac{1}{2V_e}\left[\frac{\Gamma_x - i\Gamma_y}{2} V_e^2 D(1,-1)\left(\frac{\partial\alpha_{-1,1}^{-1}}{\partial V_e} + \frac{\partial\alpha_{1,1}^{-1}}{\partial V_e}\right)\right.$$
$$- \frac{\Gamma_x + i\Gamma_y}{2} V_e^2 F(1,1)\left(\frac{\partial\alpha_{-1,1}^1}{\partial V_e} + \frac{\partial\alpha_{1,1}^1}{\partial V_e}\right)$$
$$\left. + \Gamma_z V_e^2 B(1,0)\left(\frac{\partial\alpha_{-1,1}^1}{\partial V_e} + \frac{\partial\alpha_{1,1}^0}{\partial V_e}\right)\right]$$
$$+ \frac{3}{2}\left[\frac{\Gamma_x - i\Gamma_y}{2} D(1,-1)(\alpha_{-1,1}^{-1} + \alpha_{1,1}^{-1})\right.$$
$$- \frac{\Gamma_x + i\Gamma_y}{2} F(1,1)(\alpha_{-1,1}^1 + \alpha_{1,1}^1)$$
$$\left. + \Gamma_z B(1,0)(\alpha_{-1,1}^0 + \alpha_{1,1}^0)\right] = J_{\text{I.L.}}(\alpha_{0,0}^0),$$

soit en utilisant les formules (9.10), (9.11) et (9.3) :

$$\frac{V_e^2}{3}\nabla_r . \boldsymbol{F}_0^{(1)} + \frac{1}{6V_e^2}\frac{\partial}{\partial V_e}(V_e^3\, \boldsymbol{\Gamma} . \boldsymbol{F}_1^{(1)}) = J_{\text{I.L}}(F_0^{(0)}). \quad (9.13)$$

De même pour $k = \pm 1$, $l = 0$, $m = 0$ on trouve deux équations qui s'écrivent :

$$i\omega\alpha_{1,0}^0 \quad (9.14)$$
$$+ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} V_e^2\left[-\left(\frac{\partial\alpha_{1,1}^1}{\partial x} - \frac{\partial\alpha_{1,1}^{-1}}{\partial x}\right) - i\left(\frac{\partial\alpha_{1,1}^{-1}}{\partial y} + \frac{\partial\alpha_{1,1}^1}{\partial y}\right)\right]$$
$$+ V_e^2\sqrt{\frac{1}{3}}\frac{\partial\alpha_{1,1}^0}{\partial z} + \frac{V_e}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}\left[\Gamma_x\left(\frac{\partial\alpha_{0,1}^{-1}}{\partial V_e} - \frac{\partial\alpha_{0,1}^1}{\partial V_e}\right)\right.$$
$$\left. - i\Gamma_y\left(\frac{\partial\alpha_{0,1}^{-1}}{\partial V_e} + \frac{\partial\alpha_{0,1}^1}{\partial V_e}\right)\right] + \frac{V_e}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}\Gamma_z\frac{\partial\alpha_{0,1}^0}{\partial V_e}$$
$$+ \frac{3}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}[\Gamma_x(\alpha_{0,1}^{-1} - \alpha_{0,1}^1) - i\Gamma_y(\alpha_{0,1}^{-1} + \alpha_{0,1}^1)]$$
$$+ \frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}\Gamma_z\,\alpha_{0,1}^0 = J_{\text{I.L}}(\alpha_{1,0}^0)$$

et

$$-i\,\omega\alpha^0_{-1,0} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\,V_e^2\left[\left(\frac{\partial\alpha^{-1}_{-1,1}}{\partial x} - \frac{\partial\alpha^{1}_{-1,1}}{\partial x}\right) - i\left(\frac{\partial\alpha^{-1}_{-1,1}}{\partial y} + \frac{\partial\alpha^{1}_{-1,1}}{\partial y}\right)\right] + V_e^2\sqrt{\frac{1}{3}}\,\frac{\partial\alpha^0_{-1,1}}{\partial z}$$

$$+ \frac{V_e}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}\left[\Gamma_x\left(\frac{\partial\alpha^{-1}_{0,1}}{\partial V_e} - \frac{\partial\alpha^{1}_{0,1}}{\partial V_e}\right) - i\,\Gamma_y\left(\frac{\partial\alpha^{-1}_{0,1}}{\partial V_e} + \frac{\partial\alpha^{1}_{0,1}}{\partial V_e}\right)\right]$$

$$+ V_e\sqrt{\frac{1}{3}}\,\Gamma_z\frac{\partial\alpha^0_{0,1}}{\partial V_e} + \frac{3}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}\left[\Gamma_x(\alpha^{-1}_{0,1} - \alpha^{1}_{0,1}) - i\,\Gamma_y(\alpha^{-1}_{0,1} + \alpha^{1}_{0,1})\right] + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}\,\Gamma_z\,\alpha^0_{0,1} = J_{\mathrm{I.L}}(\alpha^0_{-1,0}). \qquad (9.15)$$

On ajoute et on soustrait membre à membre (9.14) et (9.15), ce qui nous donne compte tenu de (9.3) :

$$\omega\,\boldsymbol{F}_1^{(0)} - \frac{V_e^2}{3}\nabla_r.\boldsymbol{G}_1^{(1)} = -J_{\mathrm{I.L}}(G_1^{(0)}),$$

$$\omega\,G_1^{(0)} + \frac{V_e^2}{3}\vec{\nabla}_r.\boldsymbol{F}_1^{(1)} + \frac{1}{3V_e^2}\frac{\partial}{\partial V_e}(V_e^3\,\boldsymbol{\Gamma}.\boldsymbol{F}_0^{(1)}) = J_{\mathrm{I.L}}(F_1^{(0)}). \qquad (9.16)$$

Pour $k = 0$ et $l = 1$, on a 3 équations correspondant à $m = 0$ et $m = \pm 1$; on trouve donc :

a) $k = 0, l = 1, m = 0$

$$A(0,0)\,\frac{\partial\alpha^0_{0,0}}{\partial z} + \Gamma_z\frac{A(0,0)}{2V_e}\left(\frac{\partial\alpha^0_{-1,0}}{\partial V_e} + \frac{\partial\alpha^0_{1,0}}{\partial V_e}\right) = -\nu_1\,\alpha^0_{0,1} \qquad (9.17a)$$

b) $k = 0, l = 1, m = 1$

$$-\frac{C(0,0)}{2}\left(\frac{\partial\alpha^0_{0,0}}{\partial x} - i\frac{\partial\alpha^0_{0,0}}{\partial y}\right) - \frac{1}{4V_e}(\Gamma_x - i\,\Gamma_y)\,C(0,0)\left(\frac{\partial\alpha^0_{-1,0}}{\partial V_e} + \frac{\partial\alpha^0_{1,0}}{\partial V_e}\right) + i\,\omega_{\mathrm{B}}\,\alpha^1_{0,1} = -\nu_1\,\alpha^1_{0,1} \qquad (9.17b)$$

c) $k = 0, l = 1, m = -1$

$$\frac{E(0,0)}{2}\left(\frac{\partial\alpha^0_{0,0}}{\partial x} + i\frac{\partial\alpha^0_{0,0}}{\partial y}\right) + \frac{1}{4V_e}(\Gamma_x + i\,\Gamma_y)\,E(0,0)\left(\frac{\partial\alpha^0_{-1,0}}{\partial V_e} + \frac{\partial\alpha^0_{1,0}}{\partial V_e}\right) - i\,\omega_{\mathrm{B}}\,\alpha^{-1}_{0,1} = -\nu_1\,\alpha^{-1}_{0,1}. \qquad (9.17c)$$

En combinant ces trois équations comme précédemment, on obtient

$$\nabla_r F_0^{(0)} + \frac{\boldsymbol{\Gamma}}{2V_e}\frac{\partial F_1^{(0)}}{\partial V_e} - (\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{B}} \wedge \boldsymbol{F}_0^{(1)}) = -\nu_1\,\boldsymbol{F}_0^{(1)}. \qquad (9.18)$$

Voyons maintenant le cas où $k = \pm 1$ et $l = 1$; on a 2 jeux de 3 équations correspondant aux trois valeurs possibles de m ; $m = 0$ et $m = \pm 1$. Il vient ainsi, toujours d'après (7.16) :

a) $k = l = 1, m = 0$:

$$i\omega\alpha^0_{1,1} + \frac{1}{2}A(0,0)\left(\frac{\partial\alpha^0_{1,0}}{\partial z}\right) + \frac{\Gamma_z}{2V_e}A(0,0)\frac{\partial\alpha^0_{0,0}}{\partial V_e} = -\nu_1\,\alpha^0_{1,1} \qquad (9.19a)$$

b) $k = l = 1, m = 1$

$$i\omega\alpha^1_{1,1} - \frac{C(0,0)}{2}\left(\frac{\partial\alpha^0_{1,0}}{\partial x} - i\frac{\partial\alpha^0_{1,0}}{\partial y}\right) - \frac{C(0,0)}{4V_e}(\Gamma_x - i\,\Gamma_y)\frac{\partial\alpha^0_{0,0}}{\partial V_e} + i\,\omega_{\mathrm{B}}\,\alpha^1_{1,1} = -\nu_1\,\alpha^1_{1,1} \qquad (9.19b)$$

c) $k = l = 1, m = -1$

$$i\omega\,\alpha^{-1}_{1,1} + \frac{E(0,0)}{2}\left(\frac{\partial\alpha^0_{1,0}}{\partial x} + i\frac{\partial\alpha^0_{1,0}}{\partial y}\right) + \frac{E(0,0)}{4V_e}(\Gamma_x + i\,\Gamma_y)\frac{\partial\alpha^0_{0,0}}{\partial V_e} - i\omega_{\mathrm{B}}\,\alpha^{-1}_{1,1} = -\nu_1\,\alpha^{-1}_{1,1}; \qquad (9.19c)$$

et l'on a pour le groupe $k = -1$:

a) $k = -1, l = 1, m = 0$

$$-i\,\omega\,\alpha^0_{-1,1} + \frac{A(0,0)}{2}\frac{\partial\alpha^0_{-1,0}}{\partial z} + \frac{\Gamma_z}{2V_e}A(0,0)\frac{\partial\alpha^0_{0,0}}{\partial V_e} = -\nu_1\,\alpha^0_{-1,1} \qquad (9.20a)$$

b) $k = -1, l = 1, m = 1$

$$-i\,\omega\,\alpha^1_{-1,1} - \frac{C(0,0)}{2}\left(\frac{\partial\alpha^0_{-1,0}}{\partial x} - i\frac{\partial\alpha^0_{-1,0}}{\partial y}\right) - \frac{C(0,0)}{4V_e}(\Gamma_x - i\,\Gamma_y)\frac{\partial\alpha^0_{0,0}}{\partial V_e} + i\,\omega_{\mathrm{B}}\,\alpha^1_{-1,1} = -\nu_1\,\alpha^1_{-1,1} \qquad (9.20b)$$

c) $k = -1, l = 1, m = -1$

$$-i\,\omega\,\alpha^{-1}_{-1,1} + \frac{E(0,0)}{2}\left(\frac{\partial\alpha^0_{-1,0}}{\partial x} + i\frac{\partial\alpha^0_{-1,0}}{\partial y}\right) + \frac{E(0,0)}{4V_e}(\Gamma_x + i\,\Gamma_y)\frac{\partial\alpha^0_{0,0}}{\partial V_e} - i\,\omega_{\mathrm{B}}\,\alpha^{-1}_{-1,1} = -\nu_1\,\alpha^{-1}_{-1,1}, \qquad (9.20c)$$

ce qui conduit par des calculs semblables aux précédents, aux deux équations suivantes :

$$\omega\,\boldsymbol{F}_1^{(1)} - \nabla_r\,G_1^{(0)} + (\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{B}} \wedge \boldsymbol{G}_1^{(1)}) = \nu_1\,\boldsymbol{G}_1^{(1)}, \qquad (9.21)$$

$$\omega\,\boldsymbol{G}_1^{(1)} + \vec{\nabla}_r\,F_1^{(0)} + \frac{\boldsymbol{\Gamma}}{V_e}\frac{\partial F_0^{(0)}}{\partial V_e} - (\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{B}} \wedge \boldsymbol{F}_1^{(1)}) = -\nu_1\,\boldsymbol{F}_1^{(1)}.$$

En réunissant les équations (9.15), (9.16), (9.18) et (9.21), on obtient le système d'équations diffé-

rentielles suivant, dont la solution fournit la première approximation à la fonction de distribution f_e

$$\frac{V_e^2}{3}\nabla_r . \boldsymbol{F}_0^{(1)} + \frac{1}{6\, V_e^2}\frac{\partial}{\partial V_e}(V_e^3\, \boldsymbol{\Gamma} . \boldsymbol{F}_1^{(1)}) = J_{\mathrm{I.L}}(F_0^{(0)}),$$

$$\omega\, G_1^{(0)} + \frac{V_e^2}{3}\nabla_r . \boldsymbol{F}_1^{(1)} + \frac{1}{3\, V_e^2}\frac{\partial}{\partial V_e}(V_e^3\, \boldsymbol{\Gamma} . \boldsymbol{F}_0^{(1)}) = J_{\mathrm{I.L}}(F_1^{(0)}),$$

$$\omega\, F_1^{(0)} - \frac{V_e^2}{3}\nabla_r . \boldsymbol{G}_1^{(1)} = J_{\mathrm{I.L}}(G_1^{(0)}),$$

$$\nabla_r F_0^{(0)} + \frac{\boldsymbol{\Gamma}}{2\, V_e}\frac{\partial F_1^{(0)}}{\partial V_e} - (\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{B}} \wedge \boldsymbol{F}_0^{(1)}) = -\nu_1 \boldsymbol{F}_0^{(1)}, \quad (9.22)$$

$$\omega\, \boldsymbol{F}_1^{(1)} - \nabla_r G_1^{(0)} + \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{B}} \wedge \boldsymbol{G}_1^{(1)} = \nu_1 \boldsymbol{G}_1^{(1)},$$

$$\omega\, \boldsymbol{G}_1^{(1)} + \nabla_r F_1^{(0)} + \frac{\boldsymbol{\Gamma}}{V_e}\frac{\partial F_0^{(0)}}{\partial V_e} - \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{B}} \wedge \boldsymbol{F}_1^{(1)} = -\nu_1 \boldsymbol{F}_1^{(1)}.$$

10. Développement en présence d'une force indépendante du temps. — Nous allons étendre cette méthode au cas où le plasma est soumis, en plus d'une force électrique alternative, à une force électrique $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{r})$ constante dans le temps. Il figurera dès lors dans le premier membre de l'équation de Boltzmann, un terme supplémentaire additif $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{r}) . \nabla_{ve} f_e$.

Pour résoudre l'équation de Boltzmann avec ce terme, appliquons la méthode précédente du développement en harmoniques sphériques et en série de Fourier de f_e. La contribution de la force $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{r})$ s'écrira avec des notations identiques :

$$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{r}) . \nabla_{V_e} f = \sum_{k,l,m} Y_l^m\, e^{ik\omega t} \times$$

$$\Bigg\{ \frac{1}{V_e}\Bigg[\frac{K_x - iK_y}{2}\Bigg(- \frac{\partial \alpha_{k,l-1}^{m-1}}{\partial V_e} C(l-1,\ m-1) + V_e^3 \frac{\partial \alpha_{k,l+1}^{m-1}}{\partial V_e} D(l+1,\ m-1)\Bigg)$$

$$+ \frac{K_x + iK_y}{2}\Bigg(\frac{\partial \alpha_{k,l-1}^{m+1}}{\partial V_e} E(l-1,\ m+1) - V_e^3 \frac{\partial \alpha_{k,l+1}^{m+1}}{\partial V_e} F(l+1,\ m+1)\Bigg) \quad (10.1)$$

$$+ K_z\Bigg(\frac{\partial \alpha_{k,l-1}^{m}}{\partial V_e} A(l-1,\ m) + V_e^3 \frac{\partial \alpha_{k,l+1}^{m}}{\partial V_e} B(l+1,\ m)\Bigg)\Bigg]$$

$$+ (2l+3)\Bigg[\frac{K_x - i\, K_y}{2} D(l+1,\ m-1)\, \alpha_{k,l+1}^{m-1} - \frac{K_x + iK_y}{2} F(l+1,\ m+1)\, \alpha_{k,l+1}^{m+1} + K_z\, B(l+1,\ m)\, \alpha_{k,l+1}^{m} \Bigg] \Bigg\}.$$

En introduisant la contribution du premier ordre de (10.1) dans (9.22), on obtient le système suivant de 12 équations :

$$\frac{V_e^2}{3}\nabla_r . \boldsymbol{F}_0^{(1)} + \frac{1}{6\, V_e^2}\frac{\partial}{\partial V_e}(V_e^3\, \boldsymbol{\Gamma} . \boldsymbol{F}_1^{(1)}) + \frac{1}{3\, V_e^2}\frac{\partial}{\partial V_e}(V^3\, \boldsymbol{K}(\boldsymbol{r}) . \boldsymbol{F}_0^{(1)}) = \mathrm{J}(F_0^{(0)}),$$

$$\omega\, G_1^{(1)} + \frac{V_e^2}{3}\nabla_r . \boldsymbol{F}_1^{(1)} + \frac{1}{3\, V_e^2}\frac{\partial}{\partial V_e}(V_e^3\, \boldsymbol{\Gamma} . \boldsymbol{F}_{(0)}^1) + \frac{1}{3\, V_e^2}\frac{\partial}{\partial V_e}(V_e^3 \boldsymbol{K}(\boldsymbol{r}) . \boldsymbol{F}_1^{(1)}) = J(F_1^{(0)}),$$

$$\omega\, F_1^{(0)} - \frac{V_e^2}{3}\nabla_r \boldsymbol{G}_1^{(1)} - \frac{1}{3\, V_e^2}\frac{\partial}{\partial V_e}(V_e^3 \boldsymbol{K}(\boldsymbol{r}) . \boldsymbol{G}_1^{(1)}) = - J(G_1^{(0)}),$$

$$\nabla_r F_0^{(0)} + \frac{\boldsymbol{\Gamma}}{2\, V_e}\frac{\partial F_1^{(0)}}{\partial V_e} + \frac{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{r})}{V_e}\frac{\partial F_0^{(0)}}{\partial V_e} - \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{B}} \wedge \boldsymbol{F}_0^{(1)} = -\nu_1 \boldsymbol{F}_0^{(1)},$$

$$\omega\, \boldsymbol{F}_1^{(1)} - \nabla_r \boldsymbol{G}_1^{(0)} - \frac{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{r})}{V_e}\frac{\partial G_1^{(0)}}{\partial V_e} + \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{B}} \wedge \boldsymbol{G}_1^{(1)} = \nu_1 \boldsymbol{G}_1^{(1)},$$

$$\omega\, \boldsymbol{G}_1^{(1)} + \nabla_r F_1^{(0)} + \frac{\boldsymbol{\Gamma}}{V_e}\frac{\partial F_0^{(0)}}{\partial V_e} + \frac{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{r})}{V_e}\frac{\partial F_1^{(0)}}{\partial V_e} - \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{B}} \wedge \boldsymbol{F}_1^{(1)} = -\nu_1 \boldsymbol{F}_1^{(1)}, \quad (10.2)$$

Les systèmes d'équation (9.22) et (10.2) permettent d'aborder l'étude théorique de divers phénomènes physiques tels que : diffusion, effet Hall, conductivité et propagation des ondes électrodynamiques dans un plasma inhomogène et anisotrope.

Remarquons enfin que nos formules (mutatis mutandis) peuvent trouver des applications dans la théorie de la diffusion des neutrons lents dans des milieux inhomogènes (réacteurs nucléaires).

APPENDICE

Nous utilisons dans le texte les fonctions sphériques sous la forme :

$$Y_l^m(r, \theta, \varphi) = (-1)^m\, V_e^l \sqrt{\frac{(2l+1)\,(l-m)\,!}{4\pi(l+m)\,!}} \sin^m\theta \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}\,(\cos\,\theta)^m} P_l\,(\cos\theta)\, e^{im\varphi} \quad (1)$$

avec la relation

$$Y_l^{m*} = (-1)^m\, Y_l^{-m}. \quad (2)$$

Le choix des phases que nous faisons ainsi conduit à l'apparition du facteur -1 seulement pour les valeurs positives impaires de m. Dans la théorie usuelle des fonctions sphériques on choisit les fonctions de normalisation en mettant le facteur $(-1)^m$ dans les facteurs de normalisation. Avec les notations de Condon et Shortley [3], nos Y_l^m s'écrivent

$$Y_l^m = V_e^l\, \Theta_l^m\, \Phi_m, \quad (3)$$

avec

$\Theta_l^m = \Theta_l^m$ (C. S.) $= (m > 0)$

$$\begin{cases} \Theta_l^m = (-1)^m \sqrt{\dfrac{2l+1}{2}\dfrac{(l-m)!}{(l+m)!}} \sin^m\theta \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,(\cos\theta)^m} P_l(\cos\theta) \\ \Theta_l^{-m} = + \sqrt{\dfrac{2l+1}{2}\dfrac{(l-m)!}{(l+m)!}} \sin^m\theta \dfrac{d^m}{\mathrm{d}\,(\cos\theta)^m} (P_l \cos\theta). \end{cases} \tag{4}$$

d'où

$$\Theta_l^m = (-1)^m \Theta_l^{-m}.$$

Donnons à titre d'exemple quelques valeurs explicites des Θ_l^m

$$\Theta_0^0 = \sqrt{\frac{1}{2}}; \quad \Theta_1^0 = \sqrt{\frac{3}{2}}\cos\theta; \quad \Theta_1^{\pm 1} = \mp\sqrt{\frac{3}{4}}\sin\theta$$

$$\Theta_2^0 = \sqrt{\frac{5}{8}}(2\cos^2\theta - \sin^2\theta);$$

$$\Theta_2^{\pm 1} = \mp\sqrt{\frac{15}{4}}\cos\theta\sin\theta;$$

$$\Theta_2^{\pm 2} = \sqrt{\frac{15}{16}}\sin^2\theta;$$

$$\Theta_3^0 = \sqrt{\frac{7}{8}}(2\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta). \tag{5}$$

En outre

$$\Phi_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}, \tag{6}$$

avec la condition de normalisation

$$\int_0^{2\pi} \Phi(m)\,\Phi(m')\,\mathrm{d}\varphi = \delta_{mm'}. \tag{7}$$

Avec ces notations les formules de récurrence pour les fonctions Θ_l^m prennent la forme :

$$\cos\theta.\Theta_l^m = \Theta_{l+1}^m \sqrt{\frac{(l+1-m)(l+1+m)}{(2l+1)(2l+3)}} + \Theta_{l-1}^m \sqrt{\frac{(l-m)(l+m)}{(2l-1)(2l+1)}}; \tag{8}$$

$$\sin\theta\,\Theta_l^m = -\Theta_{l+1}^{m+1}\sqrt{\frac{(l+m+1)(l+m+2)}{(2l+1)(2l+3)}} + \Theta_{l-1}^{m+1}\sqrt{\frac{(l-m)(l-m-1)}{(2l-1)(2l+1)}}$$
$$- \Theta_{l+1}^{m-1}\sqrt{\frac{(l-m+1)(l-m+2)}{(2l+1)(2l+3)}} - \Theta_{l-1}^{m-1}\sqrt{\frac{(l+m)(l+m-1)}{(2l-1)(2l+1)}}.$$

Nous posons dans le texte pour simplifier l'écriture :

$$\begin{aligned} A(l,m) &= \sqrt{\frac{(l+1-m)(l+1+m)}{(2l+1)(2l+3)}}, \\ B(l,m) &= \sqrt{\frac{(l-m)(l+m)}{(2l-1)(2l+1)}}, \\ C(l,m) &= \sqrt{\frac{(l+m+1)(l+m+2)}{(2l+1)(2l+3)}}, \\ D(l,m) &= \sqrt{\frac{(l-m)(l-m-1)}{(2l-1)(2l+1)}}, \\ E(l,m) &= \sqrt{\frac{(l-m+1)(l-m+2)}{(2l+1)(2l+3)}}, \\ F(l,m) &= \sqrt{\frac{(l+m)(l+m-1)}{(2l-1)(2l+1)}}. \end{aligned} \tag{9}$$

Indiquons enfin qu'à l'aide de l'équation différentielle de définition des P_l^m, on peut établir la relation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\Theta_l^m = \frac{1}{2}\sqrt{(l-m)(l+m+1)}\,\Theta_l^{m+1} - \frac{1}{2}\sqrt{(l+m)(l-m+1)}\,\Theta_l^{m-1}, \tag{10}$$

$$m\,\mathrm{cotg}\,\theta.\Theta_l^m = -\frac{1}{2}\sqrt{(l-m)(l+m+1)}\,\Theta_l^{m+1} - \frac{1}{2}\sqrt{(l+m)(l-m+1)}\,\Theta_l^{m-1}. \tag{11}$$

Manuscrit reçu le 21 mars 1958.

BIBLIOGRAPHIE

[1] W. P. Allis, *Handbuch der Physik*, **21**, 1956, pp. 383-444.

[2] Jancel et T. Kahan, *C. R. Acad. Sc.*, **244**, 1957, pp. 1333, 2583, 2894.

[3] Condon et Shortley, Theory of atomic spectra.

DIFFRACTION DE LA LUMIÈRE PAR LES ONDES ULTRASONORES

Par R. R. AGGARWAL, J. S. O.
Defence Science Organisation, Ministry of Defence, New Delhi.

Résumé. — Par une méthode d'approximations successives [1], on a poursuivi le calcul de l'intensité des franges de diffraction, en supposant que la figure de diffraction ne contient qu'un nombre limité de franges. Les résultats sont identiques à ceux que donnent d'autre méthodes plus pénibles. Celle-ci a l'avantage de pouvoir être aisément généralisée, la précision s'accroissant par substitution en retour. On voit que, lorsque l'angle d'incidence varie l'intensité d'une frange de diffraction particulière atteint son maximum maximorum pour l'angle de réflexion de Bragg, et ses maximums secondaires pour les angles de Bragg correspondant aux autres ordres.

Abstract. — The procedure of obtaining closed intensity expressions for [1] the diffraction lines on the assumption that the pattern exhibits only a limited number of diffraction lines has been elucidated further by applying the method of successive approximation. The identity of most of the results obtained by others through laborious methods is established. The method has the advantage that it can be generalised easily, the accuracy being increased by ' back substitution '. It is seen that as the angle of incidence is varied the intensity of a particular diffraction line attains a principal maximum at the corresponding Bragg reflection angle and secondary maxima at the Bragg reflection angles corresponding to the other orders.

Introduction. — Lucas et Biquard [2] ont proposé une théorie d'optique géométrique pour la diffraction de la lumière par un milieu agité par des ondes ultrasonores. Cette théorie a été développée récemment par Nomoto [3]. Brillouin [4] a considéré le phénomène comme dû à la réflexion de la lumière par des couches successives de liquide d'indice convenable ; plus récemment [5], il l'a considéré comme dû à la propagation de la lumière à travers un milieu dont l'indice présente des variations périodiques. Cela donnait une équation d'onde où l'indice était variable, qu'il transformait en une équation du type étudié par Mathieu. Les solutions étaient alors données par Brillouin, Rytov [6] et, dernièrement, Mertens [7] sous la forme de fonctions de Mathieu, tandis qu'Extermann et Wannier [8] utilisaient le déterminant de Hill pour résoudre cette même équation.

Raman et Nath [9] considéraient le phénomène de diffraction comme dû à la transmission à travers un milieu stratifié, et exprimaient l'intensité à l'aide de fonctions de Bessel. Comme cette approximation élémentaire ne pouvait expliquer toutes les particularités du phénomène, ils développèrent l'idée de l'équation d'onde de Brillouin et arrivèrent à une équation aux différences mêlées [10]. Nath, plus tard, résolut cette équation [11] et obtint une solution sous forme d'un développement en une série en général non convergente.

A côté de la théorie optique géométrique de Lucas et Biquard, et de la théorie dynamique d'Extermann, certaines autres utilisent la même équation fondamentale, et l'auteur [1] a pu, par conséquent, établir l'identité de différentes expressions obtenues pour les intensités des franges de diffraction par divers auteurs. Pour cela, il a résolu l'équation aux différences finies mentionnée précédemment, en admettant que la figure de diffraction ne comprenait qu'un nombre limité de franges.

Le calcul par approximations successives a été poursuivi dans sa thèse [13].

Par une méthode analogue à celle de Nath [14], l'auteur a obtenu les expressions exactes de l'intensité quand la figure de diffraction ne comprend que les franges d'ordre zéro et un, obtenues par réflexion. Ces résultats ont été depuis publiés par Pariseau [15]. La méthode d'approximations successives a été étendue au calcul approché des intensités des franges du 3e ordre sous incidence oblique, ainsi que de celles des franges de 1re, 2e et 3e ordre pour des angles d'incidence correspondant aux réflexions de Bragg des mêmes ordres.

La méthode de substitution en retour (back substitution) indique les conditions pour lesquelles les expressions approchées des intensités sont valables. La très grande similitude entre ces résultats et ceux de Mertens [7] pour l'incidence rasante a été également discutée.

Le présent article esquisse les résultats qui se rattachent à la thèse de l'auteur, mais n'ont pas encore été publiés. Les notations utilisées sont explicitées dans l'appendice 1.

2. Expressions très approchées de l'intensité. — 1er *Cas : franges de diffraction du premier ordre.* — En supposant que pour l'ordre zéro, la lumière traverse la région des ondes ultrasonores sans aucune perte d'intensité et que la figure de diffraction ne

montre aucune frange d'ordre supérieur à 1, l'expression de l'intensité $I_{\pm 1}$ pour les franges du 1er ordre est :

$$I_{\pm 1} = \frac{\mathrm{Sin}^2 \left[(1 \mp 2\alpha) \frac{\rho\xi}{4} \right]}{\left[(1 \pm 2\alpha) \frac{\rho}{2} \right]^2}. \tag{1}$$

Cette même expression a été obtenue par Brillouin [4], Rytov [6], Erwin David [16] et, récemment, Bathia et Noble [17]. Ceux-ci tirent leur résultat de l'intégrale de la théorie de la diffusion. Connaissant l'intensité pour les franges du 1er ordre, on peut corriger par récurrence celle de l'ordre zéro dans l'équation

$$2 \frac{d\Psi_0}{d\xi} - \psi_{-1} + \psi_{+1} = 0.$$

et on obtient

$$\begin{aligned} I_0 = 1 &- \frac{4\,\mathrm{Sin}^2 \left[(1 - 2\alpha) \frac{\rho\xi}{4} \right]}{\rho^2 (1 - 2\alpha)^2} - \frac{4\,\mathrm{Sin}^2 \left[(1 + 2\alpha) \frac{\rho\xi}{4} \right]}{\rho^2 (1 + 2\alpha)^2} \\ &+ \frac{4}{\rho^4} \left[\frac{\mathrm{Sin}^2 \left[(1 - 2\alpha) \frac{\rho\xi}{4} \right]}{(1 - 2\alpha)^4} + \frac{\mathrm{Sin}^2 \left[(1 + 2\alpha) \frac{\rho\xi}{4} \right]}{(1 + 2\alpha)^4} \right. \\ &+ \frac{2}{(1 - 4\alpha^2)^2} \mathrm{Sin} \left[(1 - 2\alpha) \frac{\rho\xi}{4} \right] \\ &\qquad \left. \mathrm{Sin} \left[(1 + 2\alpha) \frac{\rho\xi}{4} \right] \mathrm{Cos}\, \rho\xi\alpha \right] \\ &+ \frac{2\xi}{\rho^3 (1 - 4\alpha^2)} \\ &\qquad \left[\frac{\mathrm{Sin} \left[(1 - 2\alpha) \frac{\rho\xi}{2} \right]}{(1 - 2\alpha)^2} + \frac{\mathrm{Sin} \left[(1 + 2\alpha) \frac{\rho\xi}{2} \right]}{(1 + 2\alpha)^2} \right] \\ &+ \frac{\xi^2}{\rho^2 (1 - 4\alpha^2)^2}. \end{aligned}$$

Pour l'incidence rasante, cette expression tend vers celle de l'intensité exacte obtenue par Nath [14] seulement si ρ est grand et ξ petit, conditions de validité de l'expression (1). De même, pour $\alpha = 1/2$, l'expression (1) se réduit à

$$I_{+1} = \frac{\xi^2}{4}.$$

L'expression approchée (1) de l'intensité est donc fausse pour $\xi > 2$, puisque I_{+1} ne peut dépasser 1.

Cas n° 2 : Franges du second ordre. — A partir des expressions des intensités d'ordre zéro et 1, on obtient pour le second ordre [1]

$$\begin{aligned} I_{+2} = \frac{1}{(1 - \alpha)(1 - 2\alpha)(3 - 2\alpha)\rho^4} &\left[- \frac{\mathrm{Sin}^2 [(1 - \alpha)\rho\xi]}{4(1 - \alpha)} \right. \\ &\left. + \frac{\mathrm{Sin}^2 \left[(1 - 2\alpha) \frac{\rho\xi}{4} \right]}{(1 - 2\alpha)} + \frac{\mathrm{Sin}^2 \left[(3 - 2\alpha) \frac{\rho\xi}{4} \right]}{(3 - 2\alpha)} \right] \end{aligned} \tag{2}$$

identique à l'expression obtenue par Erwin David [16] et Noble et Bhatia [17]. Pour l'incidence rasante, il vient

$$I_{+2} = \frac{1}{3\rho^4} \left[- \frac{\mathrm{Sin}^2 (\rho\xi)}{4} + \mathrm{Sin}^2 \left(\frac{\rho\xi}{4} \right) + \frac{\mathrm{Sin}^2 \left(\frac{3\rho\xi}{4} \right)}{3} \right]. \tag{3}$$

Le maximum pour I_{+2} est $4/9\rho^4$, petit seulement si ρ est grand. L'expression approchée (1) n'est donc valable que quant ρ est grand, sinon il faut la corriger par substitution en retour.

D'autre part, I_{+2} possède un maximum principal pour $\alpha = 1$, et des maximums secondaires pour $\alpha = 1/2$ et $\alpha = 3/2$. Pour ces valeurs de α, l'expression (2) prend une forme indéterminée. Extermann [12] avait rencontré la même difficulté pour calculer le déterminant de Hill. Pour la surmonter, il faut reprendre tout le calcul avec la valeur particulière de α. Prenons, par exemple, le cas où $\alpha = 1$: le système d'équations différentielles devient :

$$\left. \begin{aligned} 2 \frac{d\psi_1}{d\xi} + i\rho\psi_1 &= 1 \\ 2 \frac{d\psi_2}{d\xi} - \quad \psi_1 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Leur résolution donne

$$I_{+1} = \frac{4}{\rho^2} \mathrm{Sin}^2 [\rho\xi/4] \tag{4}$$

et

$$(I_{+2})_{\alpha=1} = \frac{1}{4\rho^4} \left[\left\{ 4\,\mathrm{Sin} \left(\frac{\rho\xi}{4} \right) - \rho\xi\, \mathrm{Cos} \left(\frac{\rho\xi}{4} \right) \right\}^2 + \rho^2 \xi^2 \mathrm{Sin}^2 \left(\frac{\rho\xi}{4} \right) \right]. \tag{5}$$

L'expression (4) donnant la première approximation de l'intensité n'est valable que si (5) est petit, ce qui n'est possible que pour ρ grand et ξ petit. Donc, les conditions de validité sont plus restrictives quand $\alpha = 1$, ce qui est généralement le cas, quant α vaut un nombre quelconque de fois 1/2. On trouve, par un procédé analogue :

$$\begin{aligned} (I_{+2})_{\alpha=1/2} = (I_{+2})_{\alpha=3/2} &= \frac{1}{16\rho^4} \left[\left\{ 2\,\mathrm{Sin} \left(\frac{\rho\xi}{2} \right) - \rho\xi\, \mathrm{Cos} \left(\frac{\rho\xi}{2} \right) \right\}^2 \right. \\ &\left. + \rho^2 \xi^2 \mathrm{Sin}^2 \left(\frac{\rho\xi}{2} \right) \right] \end{aligned} \tag{6}$$

Les intensités maximums aux différents angles satisfont aux conditions.

$$(I_{+2})_{\alpha=1} > (I_{+2})_{\alpha=1/2} > (I_2)_{\alpha=0}. \tag{7}$$

Cas n° 3 : Franges du troisième ordre. — En appliquant la méthode adoptée dans le travail pré-

cédent de l'auteur [1], on obtient pour ψ_3 l'équation supplémentaire :

$$2\frac{d\psi_3}{d\xi} - i\rho(6-9\alpha)\,\psi_3 = \psi_2.$$

et, en utilisant la valeur déjà obtenue pour ψ_2 :

$$\psi_3 = \frac{1}{4i\rho^3}\left[-\frac{\exp\left\{i(1-2\alpha)\frac{\rho\xi}{2}\right\}}{(2-\alpha)(1-2\alpha)(3-2\alpha)} + \frac{\exp\{i(2-2\alpha)\rho\xi\}}{(5-2\alpha)(3-2\alpha)(1-\alpha)} - \frac{\exp\left\{i(9-6\alpha)\frac{\rho\xi}{2}\right\}}{3(2-\alpha)(3-2\alpha)(5-2\alpha)} + \frac{1}{3(1-2\alpha)(1-\alpha)(3-2\alpha)}\right]. \quad (8)$$

d'où :

$$I_{+3} = \frac{1}{4\rho^6(3-2\alpha)^2}\left[\frac{\text{Sin}^2\left\{(1-2\alpha)\frac{\rho\xi}{4}\right\}}{(2-\alpha)^2(1-2\alpha)^2} + \frac{\text{Sin}^2\{(1-\alpha)\rho\xi\}}{(5-2\alpha)^2(1-\alpha)^2} + \frac{\text{Sin}^2\left\{(3-2\alpha)\frac{3\rho\xi}{4}\right\}}{9(2-\alpha)^2(5-2\alpha)^2} - \frac{2\,\text{Sin}\left\{(1-2\alpha)\frac{\rho\xi}{4}\right\}\text{Sin}\{(1-\alpha)\rho\xi\}}{(2-\alpha)(1-\alpha)(1-2\alpha)(5-2\alpha)}\,\text{Cos}\left\{(3-2\alpha)\frac{\rho\xi}{4}\right\} + \frac{2\,\text{Sin}\left\{(1-2\alpha)\frac{\rho\xi}{4}\right\}\text{Sin}\left\{(3-2\alpha)\frac{3\rho\xi}{4}\right\}}{3(2-\alpha)^2(1-2\alpha)(5-2\alpha)}\,\text{Cos}\{(2-\alpha)\rho\xi\} - \frac{2\,\text{Sin}\{(1-\alpha)\rho\xi\}\text{Sin}\left\{(3-2\alpha)\frac{3\rho\xi}{4}\right\}}{3(5-2\alpha)^2(1-\alpha)(2-\alpha)}\,\text{Cos}\left\{(5-2\alpha)\frac{\rho\xi}{4}\right\}\right]. \quad (9)$$

à l'incidence rasante

$$I_3 = \frac{1}{36\rho^6}\left[\frac{\text{Sin}^2\left(\frac{\rho\xi}{4}\right)}{4} + \frac{\text{Sin}^2(\rho\xi)}{25} + \frac{\text{Sin}^2\left(\frac{9\rho\xi}{4}\right)}{900} - \frac{1}{5}\text{Sin}\left(\frac{\rho\xi}{4}\right)\text{Sin}(\rho\xi)\,\text{Cos}\left(\frac{3\rho\xi}{4}\right) + \frac{1}{30}\text{Sin}\left(\frac{\rho\xi}{4}\right)\text{Sin}\left(\frac{9\rho\xi}{4}\right)\text{Cos}(2\rho\xi) - \frac{1}{75}\text{Sin}(\rho\xi)\,\text{Sin}\left(\frac{9\rho\xi}{4}\right)\text{Cos}\left(\frac{5\rho\xi}{4}\right)\right] \quad (10)$$

dont la valeurs maximum est $121/(8\,100\,\rho^6)$. Donc, même pour $\rho = 1$, la franges du 3e ordre a une intensité négligeable. En recommençant les calculs donnés ci-dessus pour des valeurs de α multiples impairs de 1/2, on a :

$$(I_{+3})_{\alpha=3/2} = \frac{1}{16\rho^6}\left[2\,\text{Sin}\left(\frac{\rho\xi}{2}\right) - \rho\xi\,\text{Cos}\left(\frac{\rho\xi}{2}\right)\right]^2 \quad (11)$$

$$(I_{+3})_{\alpha=1} = \frac{1}{324\rho^6}\left[9\,\text{Sin}^2(\rho\xi) + 72\,\text{Sin}^2\left(\frac{\rho\xi}{4}\right) - 8\,\text{Sin}^2\left(\frac{3\rho\xi}{4}\right) - 3\rho\xi\{\text{Sin}(3\rho\xi) - 9\,\text{Sin}(\rho\xi)\} + 9\rho^2\xi^2\right] \quad (12)$$

$$(I_3)_{\alpha=1/2} = \frac{1}{5\,184\rho^6}\left[9\,\text{Sin}^2(\rho\xi) + 72\,\text{Sin}^2\left(\frac{\rho\xi}{2}\right) - 8\,\text{Sin}^2\left(\frac{3\rho\xi}{2}\right) + 3\rho\xi\{\text{Sin}(3\rho\xi) - 9\,\text{Sin}(\rho\xi)\} + 9\rho^2\xi^2\right], \quad (13)$$

L'expression (9) suggère l'existence d'un maximum maximorum pour $\alpha = 3/2$, et de maximums secondaires pour $\alpha = 1/2$ et $\alpha = 1$. Pour avoir une idée des grandeurs relatives des intensités pour $\alpha = 0$, $\alpha = 1/2$, $\alpha = 1$ et $\alpha = 3/2$, considérons le cas où $\rho\xi$ est grand par rapport à 1. Les valeurs maximums sont approximativement :

$$(I_3)_{\alpha=0} = 121/8\,100\,\rho^6$$
$$(I_3)_{\alpha=1/2} = \xi^2/576\,\rho^4$$
$$(I_3)_{\alpha=1} = \xi^2/36\,\rho^4$$
$$(I_3)_{\alpha=3/2} = \xi^2/16\,\rho^4.$$

Ainsi la frange du 3e ordre, absente pour l'incidence rasante, apparaît pour une incidence égale à l'angle de réflection de Bragg correspondant au 1er ordre, se renforce pour une incidence égale à l'angle de Bragg du 2e ordre et devient très intense pour l'angle de Bragg du 3e ordre.

3. **Expressions de l'intensité données par Brillouin et Mertens.** — Brillouin [5], puis Mertens [7] utilisant les fonctions de Mathieu, ont obtenu pour expression de l'intensité une série en ρ^{-2}, contenant, pour la n^{ieme} ordre des termes en ρ^{-2n}, $\rho^{-2(n+1)}$ ..., etc. Si on admet que les figures de diffraction ne contiennent pas de franges d'ordre supérieur à 1, on peut négliger les termes avec des coefficients ρ^{-4}, ρ^{-6} .... Leur expression pour l'intensité du premier ordre $I_{\pm1}$ à l'incidence rasante devient :

$$I_{\pm1} = \frac{4}{\rho^2}\text{Sin}^2\left[\left(1 + \frac{11}{3\rho^2}\right)\frac{\rho\xi}{4}\right].$$

L'expression (1) devient alors

$$I_{\pm1} = \frac{4}{\rho^2}\text{Sin}^2\left[\frac{\rho\xi}{4}\right].$$

Ainsi la formule de Mertens coïncide avec la formule approchée si $11/3\rho^2$ est négligeable par rapport à 1. De même, la formule de Mertens donnant l'intensité pour le second ordre, devient, en négligeant les termes en ρ^{-6}, ρ^{-8} etc. :

$$I_{\pm 2} = \frac{1}{3\rho^4}\left[-\frac{\text{Sin}^2\left\{\left(1+\frac{8}{15\rho^2}\right)\rho\xi\right\}}{4} + \frac{\text{Sin}^2\left\{\left(1+\frac{11}{3\rho^2}\right)\frac{\rho\xi}{4}\right\}}{1} + \frac{\text{Sin}^2\left\{\left(1-\frac{47}{90\rho^2}\right)\frac{3\rho\xi}{4}\right\}}{3}\right].$$

qui se réduit à (3) si ρ est grand. On peut prouver de la même façon l'équivalence des expressions de l'intensité pour le 3e ordre. Les analyses de Mertens montrent donc que l'expression (1), pour l'intensité, n'est pas rigoureusement valable en présence de franges de diffraction du second ordre. Il faut alors tenir compte des termes de coefficient ρ^{-4} dans les séries donnant les amplitudes du premier ordre. Cette correction peut s'effectuer dans notre cas par la méthode de substitution en retour précédemment indiquée. On constate également que la formule obtenue pour l'intensité par la méthode d'approximation, sans aucune correction par substitution, est exacte quand les franges de diffraction d'ordre supérieur sont négligeables.

APPENDICE I

Symboles et abréviations

λ, longueur d'onde de la lumière dans le vide.

λ^*, longueur d'onde du son dans le liquide.

φ, angle d'incidence mesuré dans le liquide.

μ_0, indice de réfraction moyen du liquide.

μ_1, variation maximum de l'indice de réfraction du liquide due aux ondes sonores.

L, largeur du faisceau sonore.

$$\xi = \frac{2\pi\,\mu_1\,L}{\lambda}.$$

$$\alpha = \frac{\mu_0\,\lambda^*}{\lambda}\varphi.$$

$$\rho = \frac{\lambda^2}{\mu_0\,\mu_1\,\lambda^{*2}}.$$

ψ_n, facteur d'amplitude de la frange de diffraction du n^{ieme} ordre figurant dans l'équation aux différences mêlées de Raman-Nath généralisée.

Manuscrit reçu le 15 octobre 1958.

RÉFÉRENCES

[1] Aggarwal (R. R.), *Proc. Ind. Acad. Sc.*, 1950, **31**, 417.
[2] Lucas (R.) et Biquard (P.), *Rev. d'Acoustique*, 1934, **3**, 198.
[3] Nomoto (O.), *Bull. Kobayashi Inst. of Phys. Res.*, 1951, **1**, 42 et 189 ; *Proc. Phys. Math. Soc.* (Japan), 1942, **24**, 380 et 613.
[4] Brillouin (L.), *C. R. Acad. Sc. Paris*, 1914, **158**, 1331 ; *Ann. de Physique*, 1922, **17**, 88.
[5] Brillouin (L.), « *Actualités* » *Sc. et Ind.*, 1933, **59** (Hermann et Cie, Paris).
[6] Rytov (S. M.), « *Actualités* » *Sc. et Ind.*, 1938, **613** (Hermann et Cie, Paris).
[7] Mertens (R.), *Simon Stevin*, 1949-1950, **27**, 212.
[8] Extermann (R.) et Wannier (G.), *Helv. Phys. Acta*, 1936, **9**, 520.
[9] Raman (C. V.) et Nath (N. S. N.), *Proc. Ind. Acad. Sc.*, 1935, **2**, 406, 413.
[10] Raman (C. V.) et Nath (N. S. N.), *Proc. Ind. Acad. Sc.*, 1936, **3**, 459.
[11] Nath (N. S. N.), *Proc. Ind. Acad. Sc.*, 1936, **4**, 222.
[12] Extermann (R.), *Helv. Phys. Acta*, 1937, **10**, 185.
[13] Aggarwal (R. R.), *Ph. D. Thesis*, Delhi University, 1955.
[14] Nath (N. S. N.), *Proc. Ind. Acad. Sc.*, 1938, **8**, 499.
[15] Pariseau (P.), *Proc. Ind. Acad. Sc.*, 1956, **44**, 165.
[16] Erwin (David), *Physik Z.*, 1937, **38**, 587.
[17] Bhatia (A. B.) et Noble (W. J.), *Proc. Roy. Soc.* (London), 1953, **220** A, 356.

LE SPECTRE D'ÉLECTRONS DE CONVERSION ÉMIS AU COURS DE LA TRANSMUTATION $^{233}Pa \rightarrow {}^{233}U$

Par Mlle GEORGETTE ALBOUY,
Laboratoire de Physique Nucléaire à Orsay

et M. MANUEL VALADARÈS,
Laboratoire de l'Aimant-Permanent, C. N. R. S., à Bellevue, Orsay.

Résumé. — On a étudié par spectrographie magnétique le spectre d'électrons de conversion émis pendant la transition $^{233}Pa \rightarrow {}^{233}U$. De nouvelles raies ont été observées, on a pu améliorer la valeur des énergies des différents rayonnements γ et en déduire leur nature et leur polarité. Les intensités relatives de quelques-uns de ces rayonnements soulèvent des difficultés pour l'acceptation du schéma de niveau actuellement admis.

Abstract. — The conversion electron spectrum emitted during the $^{233}Pa \rightarrow {}^{233}U$ transition has been studied by magnetic spectrography. New lines have been observed, energy values of various γ rays more precisely determined and their multipolarity deduced. Relative intensities of some of these rays do not agree with the level scheme at present accepted.

Introduction. — L'étude du spectre d'électrons de conversion émis au cours de la transmutation $^{233}Pa \xrightarrow{\beta} {}^{233}U$ a fait l'objet de plusieurs recherches. Après les premiers travaux de Haggstrom [5] et Lévy [8] une étude très détaillée a été faite par Keller et Cork [6] en employant la méthode de focalisation à 180° dans un champ magnétique. Ces auteurs ont étudié le spectre depuis 19 keV jusqu'à 500 keV ; ils utilisaient comme détecteur la plaque photographique et, par conséquent, les intensités des raies ont été simplement indiquées dans une classification allant depuis « très fort » jusqu'à « très faible ». D'après l'énergie des rayonnements γ, Keller et Cork ont proposé un premier schéma de niveaux pour l'Uranium 233 résultant de la transmutation β du Protactinium 233.

Elliott et Underhill [3] ont repris cette étude à l'aide d'un spectrographe à lentille et, bien que leur appareil n'eût pas le pouvoir séparateur de celui de Keller et Cork, ils ont pu donner une première mesure quantitative des intensités des raies de conversion à partir de 53 keV, les raies audessous étant trop faibles pour pouvoir être mesurées. Par ailleurs, ils ont pu décomposer le spectre continu en trois spectres et étudier les coïncidences entre les électrons de conversion des différents rayonnements γ et entre ces électrons et le fond continu. Les limites des spectres continus ne permettaient pas d'accepter le schéma de Keller et Cork et ainsi Elliott et Underhill ont proposé un nouveau schéma de niveaux pour l'Uranium 233.

L'étude du spectre continu et du spectre d'électrons de conversion a été repris par Brodie [2] utilisant un spectrographe à lentille muni d'un dispositif d'accélération des électrons après focalisation ; ainsi cet auteur a pu descendre dans l'analyse du spectre jusqu'à 6 keV et confirmer, en ce qui concerne le spectre continu, les résultats de Elliott et Underhill. Comme résultat de ses recherches, Brodie a proposé un schéma de niveaux pour l'Uranium 233 qui était celui suggéré par Keller et Cork mais inversé.

Une nouvelle étude des spectres émis au cours de la transmutation $^{233}Pa \rightarrow {}^{233}U$ a été effectuée par Ong [10] employant un spectrographe à lentille. Ong a étudié le spectre depuis 10 keV jusqu'à 600 keV, observé quelques nouvelles raies de conversion et effectué une nouvelle mesure soit des énergies maxima, soit des intensités des trois spectres continus précédemment déduits. En outre, Ong a mesuré les photons γ avec un spectrographe à scintillations et les coïncidences $\gamma - e^-$, $\beta - e^-$ et $e^- - e^-$. L'ensemble de ses résultats a conduit Ong a adopter le schéma de niveaux proposé par Brodie.

Malgré ces nombreuses recherches un certain nombre de points restaient à éclaircir : *a*) la nature et la polarité de quelques rayonnements γ ; *b*) un désaccord concernant l'intensité de certaines raies de conversion ; *c*) l'existence d'un rayonnement γ de 475 keV. C'est dans le but de contribuer à éclaircir ces problèmes et, à la fois, d'améliorer la précision sur la mesure des énergies, que nous avons entrepris cette recherche.

Spectrographe et résultats expérimentaux. — Nous avons étudié le spectre des électrons de conversion émis au cours de la transmutation

TABLEAU I

SPECTRE D'ÉLECTRONS DE CONVERSION $^{233}Pa \xrightarrow{\beta} {}^{233}U$

Keller et Cork		Brodie		Ong		Nos résultats		Niveau	Énergie γ
E	*I*	*E*	*I*	*E*	*I*	*E*	*I*		
19,6	—	19,7	5	—	—	19,29	m	L_{II}	40,23
—	—	—	—	—	—	22,89	m	M_{I}	28,44
23,5	—	23,4	10	22,5	—	23,03	m	L_{III}	40,19
—	—	—	—	—	—	23,23	f	M_{II}	28,41
24,6	—	23,8	—	23,5	—	24,13	f	M_{III}	28,43
27,5	—	27,9	—	25,9	—	27,05	m	N_{I}	28,49
28,5	—	—	—	—	—	28,16	f	O_{I}	28,48
—	—	—	—	32,5	—	—		—	—
35,2	—	35,0	—	34,3	—	35,04	m	M_{II}	40,22
36,3	—	36,5	1,5	35,3	—	35,90	m	M_{III}	40,20
37,1	—	—	—	36,7	—	—		—	—
39,1	—	—	—	38,8	—	38,98	f	N_{II}	40,25
—	—	—	—	—	—	39,24	f	N_{III}	40,28
—	—	—	—	40,9	—	40,00	t. f.	$O_{II,III}$	40,23
53,8	20	54,0	21	53,0	20	53,48	F	L_{I}	75,23
54,7	—	54,9	—	—	—	54,28	m	L_{II}	75,22
65,2	24	65,3	17,5	64,3	29	64,80	F	L_{I}	86,55
66,1	—	66,2	—	—	—	65,55	m	L_{II}	86,49
70,2	5	70,5	1	69,3	7	69,63	m	M_{I}	75,18
—	—	—	—	—	—	69,96	f	M_{II}	75,14
—	—	—	—	—	—	71,7	t. t. f.	$KL_{I}\,L_{I}$	r. Auger
—	—	—	—	—	—	72,59	t. f.	$KL_{I}\,L_{II}$	r. Auger
74,3	—	—	—	73,4	0,3	73,81	f	N_{I}	75,25
75,3	—	—	—	—	—	74,79	t. f.	O_{I}	75,11
—	—	—	—	—	—	76,2	t. t. f.	$KL_{I}\,L_{III}$	r. Auger
—	—	—	—	—	—	77,11	t. f.	$KL_{II}\,L_{III}$	r. Auger
81,7	—	—	—	80,8	—	80,99	m	M_{I}	86,54
—	—	—	—	—	13,5	81,34	f	M_{II}	86,52
82,6	11	83	10,5	81,8		81,98	m	L_{I}	103,73
83,5		—	—	—		82,61	f	L_{II}	103,55
85,7	—	—	—	84,8	3	85,03	f	N_{I}	86,47
86,8	—	—	—	—	—	86,05	t. f.	O_{I}	86,37
88,8	—	—	—	88,1	0,3	(1)	—	—	r. Auger
93,4	—	—	—	92,6		(1)	—	—	r. Auger
99,0	3	99,2	2	98,2	3	98,23	f	M_{I}	103,78
—	—	—	—	100,4	0,8	(1)	—	—	r. Auger
103,2	—	104	—	102,1	—	102,23	f	N_{I}	103,67
104,1	—	—	—	—	—	103,40	t. f.	O_{I}	103,72
—	—	—	—	105,8	0,2	(1)	—	—	r. Auger
108,8	—	—	—	108,5		(1)	—	—	r. Auger
—	—	—	—	111,4		(1)	—	—	r. Auger
156,6	—	156	—	155,6	—	—	—	(*K*)	(271)
185,6	10	—	4	184,4	22	184,1	F	*K*	299,7
197,5	100	198	100	196,1	100	196,0	t. F.	*K*	311,6
226,6	10	228	8	224,8	10	224,4	F	*K*	340,0
250,9	—	—	—	250,4		249,8	f	L_{II}	270,7
—	—	—	—	—	—	253,4	t. f.	L_{III}	270,6
260,6	—	—	—	260,4	—	258,9	f	*K*	374,5
—	—	—	—	267,0	—	265,5	t. f.	M_{II}	270,7
279,6	—	—	—	279,1	3,5	277,9	F	L_{I}	299,7
—	—	—	—	—	—	278,8	f	L_{II}	299,7
283,8	—	—	—	—	—	282,3	m	*K*	397,9
291,3	25	292	25	290,6	20	289,6	t. F.	L_{I}	311,4
—	—	—	—	—	—	290,6	m	L_{II}	311,5
296,1	—	—	—	295,7	—	294,0	m	M_{I}	299,5
—	—	—	—	—	—	298,0	f	N_{I}	299,4
300,4	—	—	—	300,2	—	299,6	m	*K*	415,2
307,5	—	—	—	307,4	4,5	305,9	F	M_{I}	311,4

TABLEAU I (*suite*)

SPECTRE D'ÉLECTRONS DE CONVERSION $^{233}\text{Pa} \xrightarrow{\beta} {}^{233}\text{U}$

Keller et Cork		Brodie		Ong		Nos résultats		Niveau	Énergie γ
E	*I*	*E*	*I*	*E*	*I*	*E*	*I*		
311,5	2,5	—	—	312,0	1,5	310,1	m	N_{I}	311,5
—		—	—	—	—	311,1	f	O_{I}	311,4
320,2		319	< 4	319,8	1,8	318,1	F	L_{I}	339,9
—	—	—	—	—	—	319,1	m	L_{II}	340,0
—	—	—	—	—	—	322,5	f	L_{III}	339,7
336,0	—	—	—	334,9	—	334,3	m. F.	M_{I}	339,8
340,1	—	—	—	340,0	—	338,6	m	N_{I}	340,0
—	—	—	—	—	—	339,6	f	O_{I}	339,9
354,5	—	—	—	353,5	0,1	354,0	m	L_{II} (2)	374,9
—	—	—	—	360,0	—	357,8	t. f.	L_{III}	375,0
—	—	—	—	370,8	—	369,5	t. f.	M_{II}	374,7
—	—	—	—	—	—	373,2	t. t. f.	N_{II}	374,5
378,1	—	—	—	377,4	0,15	377,1	m	L_{II} (2)	398,0
—	—	—	—	—	—	380,7	f	L_{III}	397,0
—	—	—	—	—	—	392,8	f	M_{II}	398,0
394,6	—	—	—	394,8	0,25	394,2	m	L_{II} (2)	415,1
—	—	—	—	—	—	396,5	t. f.	N_{II}	397,8
—	—	—	—	398,9	—	398,0	t. f.	L_{III}	415,2
411,8	—	—	—	411,6	0,1	410,3	f	M_{II}	415,5
—	—	—	—	415,8	—	414,0	t. f.	N_{II}	154,3

E, énergie en keV ; l'énergie des rayonnements γ est exprimée aussi en keV.
I, intensité.
1) Ces raies correspondent à des passages Auger *KLM* ou *KLN* ; le pouvoir séparateur de notre spectrographe montre que ces raies sont, en effet, des multiplets, mais leurs très faibles intensités ne permettent pas des mesures précises des différentes composantes.
2) Ces trois raies sont plus larges que les autres raies ; il est possible qu'il s'agisse de trois doublets L_{I}, L_{II}, mais la faible intensité des sources ne nous a pas permis d'éclaircir ce point.

$^{233}\text{Pa} \rightarrow {}^{233}\text{U}$ à l'aide de deux spectrographes (méthode de focalisation à 180°) dont les rayons de courbure maxima étaient de 15 cm et 40 cm. Les spectrographes étaient installés dans les entrefers des aimants permanents. Le champ dans le spectrographe à plus petit rayon était de ~ 300 œrsteds et pour le grand spectrographe le champ a varié de 35 à 72 œrsteds.

Le spectrographe de rayon 15 cm a été employé surtout dans le but de montrer qu'aucune raie d'énergie supérieure à 415 keV n'existe dans ce spectre ayant une intensité dix fois plus faible que celle des plus faibles raies observées. Cet examen était important pour voir s'il existait un rayonnement γ de 476 keV (les raies *L*, *M*, . . . auraient des énergies comprises entre 455 et 476 keV). Ce point sera discuté ultérieurement (voir schéma de désintégration).

Toutes les valeurs données dans le tableau I sont basées sur des mesures effectuées à l'aide du grand spectrographe et découlant de l'analyse de 70 spectres obtenus.

Les mesures des énergies ont été faites en utilisant comme étalons les principales raies du spectre du Th *B* + *C* [12].

Le tableau I contient aussi les résultats obtenus par Keller et Cork (spectrographe magnétique à focalisation à 180°), par Brodie (spectrographe à lentille) et par Ong Ping Hok (spectrographe à lentille). L'appareil de Brodie lui a permis, grâce à l'emploi comme détecteur des électrons d'un compteur à paroi très mince, de descendre l'analyse jusqu'à 7 keV et celui de Ong jusqu'à 10 keV. Comme nous employons du film photographique l'analyse devient difficile au-dessous de 15 keV ; nous pensons reprendre l'étude de cette partie du spectre (au-dessous de 19 keV) en employant la méthode de pré- ou post-accélération.

Nous avons inscrit sur ce tableau les intensités données par les différents auteurs pour certaines raies, mais nous nous sommes bornés, en ce qui concerne nos résultats, à indiquer l'ordre de grandeur résultant de l'examen visuel. En effet, il est difficile lorsqu'on emploie comme détecteur le film photographique de comparer les intensités des raies dont l'énergie varie depuis 19 jusqu'à 400 keV. En

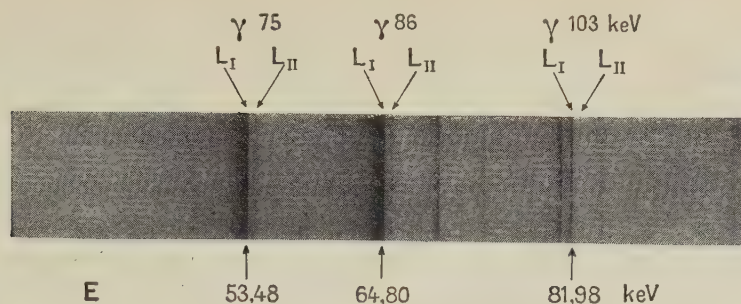


Fig. 1. — Spectre d'électrons de conversion dans la région de 53 à 86 keV.

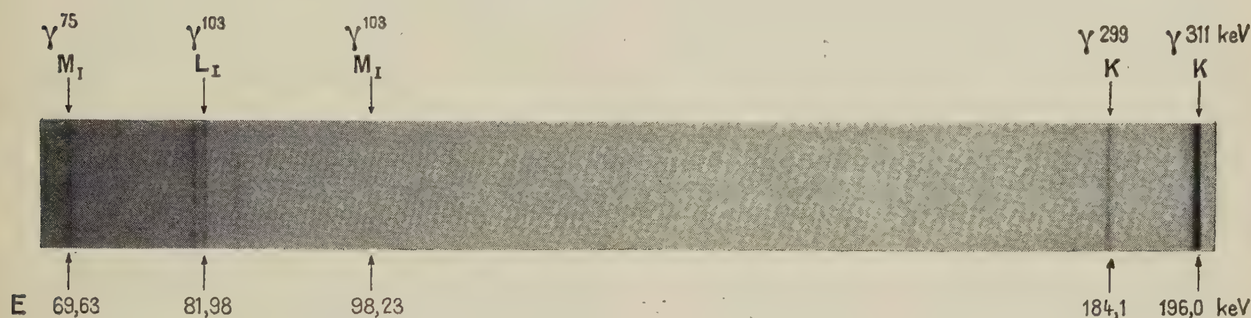


Fig. 2. — Spectre d'électrons de conversion dans la région de 69 à 200 keV.

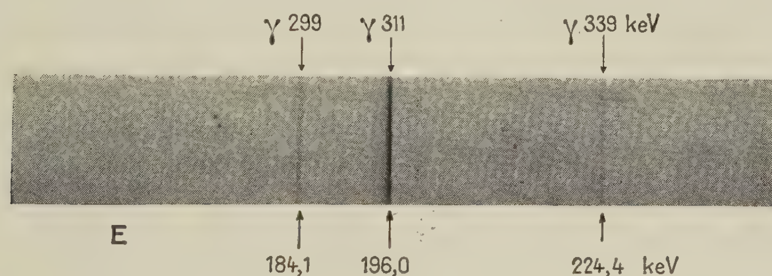


Fig. 3. — Spectre d'électrons de conversion dans la région de 180 à 230 keV.

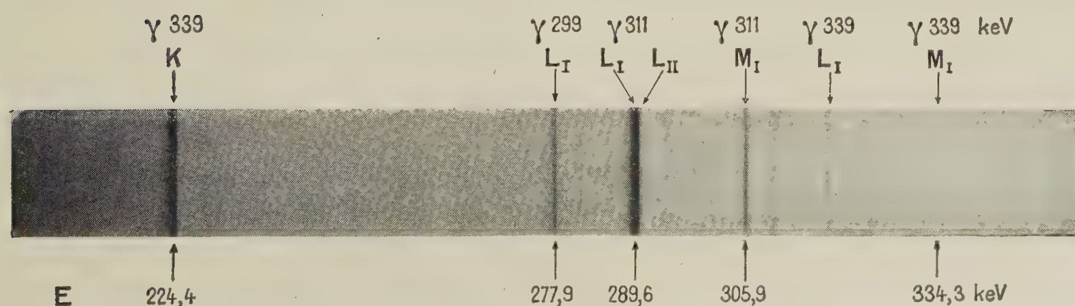


Fig. 4. — Spectre d'électrons de conversion dans la région de 220 à 340 keV.

tout cas, pour un certain nombre de cas intéressants nous nous sommes attachés à faire des déterminations quantitatives des intensités relatives des raies spectrales, comme nous le verrons par la suite. Remarquons que les intensités de la colonne Keller et Cork sont les intensités mesurées par Elliott et Underhill.

L'attribution des raies aux différents niveaux de conversion est parfois différente de celle qui avait été donnée auparavant ; le pouvoir séparateur du spectrographe et l'amélioration sur la précision de la mesure des énergies nous a permis, en effet, de faire cette attribution sans ambiguïté.

Les figures 1 à 4 reproduisent différentes régions spectrales de 50 à 340 keV. Les figures 5 à 10 reproduisent des microphotogrammes soit des clichés des figures 1 à 4, soit des clichés pris avec des temps de pose différents, mais des mêmes régions spectrales.

Fig. 5. — Microphotogramme du spectre de raies de conversion dans la région de 53 à 66 keV (voir *fig.* 1).

Fig. 6. — Microphotogramme du spectre de raies de conversion dans la région de 64 à 86 keV (voir *fig.* 1).

Fig. 7. — Microphotogramme du spectre de raies de conversion dans la région de 180 à 230 keV (voir *fig.* 3).

Fig. 8. — Microphotogramme du spectre de raies de conversion dans la région de 180 à 230 keV. Cliché surexposé (voir *fig.* 3).

Fig. 9. — Microphotogramme du spectre de raies de conversion dans la région de 270 à 335 keV (voir *fig* 4).

Fig. 10. — Microphotogramme du spectre de raies de conversion dans la région de 300 à 340 keV (voir *fig.* 4).

Nature et polarité des différents rayonnements γ. — Rayonnement γ de 28,45 keV. — Nous avons observé la conversion de ce rayonnement dans les couches M_I, M_{II}, M_{III}, N_I et O_I comme le montre le tableau suivant :

m	22,89 + 5,55 (M_I)	= 28,44 keV
f	23,23 + 5,18 (M_{II})	= 28,41 »
f	24,13 + 4,30 (N_{III})	= 28,43 »
m	27,05 + 1,44 (N_I)	= 28,49 »
f	28,16 + 0,32 (O_I)	= 28,48 »
	Moyenne.........	= 28,45 keV

Brodie a observé la conversion de ce rayonnement dans les couches L_I et L_{II} ; peut-être la raie de 11,6 keV signalée par cet auteur correspond, au moins en partie, à la conversion dans la couche L_{III}. Notre dispositif expérimental ne permettait pas de descendre à des énergies si basses par manque de sensibilité du film photographique employé comme détecteur.

Sur nos clichés la raie M_I est nettement plus intense que M_{II} qui, à son tour, est légèrement plus faible que M_{III}. Les rapports de conversion dans les trois sous-niveaux M rappellent la conversion, dans la même couche, du rayonnement γ de

33,12 keV émis au cours de la transmutation $^{241}Am \rightarrow {}^{237}Np$ [9]. Il est très probable que le rayonnement γ de 27,45 keV soit aussi un mélange $M1 + E2$, à large prédominance de $M1$.

Rayonnement γ de 40,23 keV. — Le fait que nous ayons pu décomposer la raie de conversion de 23,5 keV (Keller et Cork) en trois raies (22,89, 23,03 et 23,23 keV) nous a permis de mettre en évidence la conversion dans la couche L_{III} du rayonnement γ de 40,23 keV ; en effet, cette raie avait été considérée jusqu'à maintenant comme étant due exclusivement à la conversion en M_I du rayonnement γ de 28,45 keV. Le tableau suivant contient les différentes raies de conversion de ce rayonnement.

m	19,29 + 20,94 (L_{II})	= 40,23 keV
m	23,03 + 17,16 (L_{III})	= 40,19 »
m	35,04 + 5,18 (M_{II})	= 40,22 »
m	35,90 + 4,30 (M_{III})	= 40,20 »
f	38,98 + 1,27 (N_{II})	= 40,25 »
f	39,24 + 1,04 (N_{III})	= 40,28 »
t. f.	40,00 + 0,23 ($O_{II,III}$)	= 40,23 »
	Moyenne	= 40,23 keV

Remarquons que les raies de 35,04 et 35,90 keV avaient été considérées jusqu'à maintenant comme des raies de conversion en L_I et L_{II} d'un rayonnement γ de 57 keV mais soit la détermination plus précise des énergies, soit le rapport des intensités nous conduisent à classer ces deux raies comme résultant de la conversion en M_{II} et M_{III} du rayonnement γ de 40 keV. Ainsi malgré qu'il existe un passage de 57 keV dans le schéma de niveaux de l'Uranium 233, il ne nous semble pas qu'on puisse parler d'un rayonnement γ de cette énergie ; d'ailleurs, Browne qui a étudié ces rayonnements γ de faible énergie à l'aide d'un spectrographe à cristal du type Cauchois n'a pas observé non plus un rayonnement ayant cette énergie. Or, comme les raies de 35,04 et 35,90 keV ont des intensités du même ordre de grandeur que les intensités des raies de 19,29 et 23,03 keV, s'il y avait deux rayonnements γ (40 et 57 keV) les deux devraient être visibles par spectrographie cristalline.

Brodie avait signalé une raie de conversion en L_I, dont l'intensité serait du même ordre de grandeur que celle de la raie de conversion en L_{II}. En effet, sur un de nos clichés les plus exposés, on voit une raie très faible qui pourrait correspondre, d'après l'énergie, à la conversion en L_I, mais son intensité est certainement vingt ou trente fois plus faible que celle correspondant à la conversion en L_{II}. Les raies de conversion en L_{II} et L_{III} ont sensiblement la même intensité, mais une détermination précise du rapport des intensités est rendue difficile du fait que la raie L_{III} est la composante du milieu du triplet 22,89, 23,03 et 23,23 keV.

Nous avons observé encore les doublets $M_{II.III}$ et $N_{II.III}$, les deux raies de chaque doublet ayant sensiblement la même intensité, nous n'avons pu détecter la conversion dans le premier sous-niveau, c'est-à-dire soit M_I, soit N_I.

D'après ces résultats on classerait le rayonnement γ de 40,23 keV comme un quadrupôle électrique pur. Pourtant, les expériences d'excitation coulombienne [9] ont conduit [1] à considérer ce rayonnement comme un mélange $M1 + E2$ dans les proportions, en photons de 20 à 80 %.

La méthode expérimentale que nous employons (détermination des rapports en intensité L_I/L_{II}, L_{II}/L_{III}, M_I/M_{II}, etc...) est très sensible aux faibles mélanges de $E2$, mais peu sensible aux faibles mélanges de $M1$; en tout cas, il nous semble difficile d'admettre que $M1$ puisse être mélangé dans la proportion, en photons de 20 %. Nous reviendrons sur ce problème dans la discussion du schéma de niveaux.

Rayonnements γ de 75,19 keV, 86,49 keV et 103,7 keV. — Le classement des raies de conversion de ces rayonnements est fait dans les tableaux suivants :

F	53,48 + 21,75 (L_I)	= 75,23 keV
m	54,28 + 20,94 (L_{II})	= 75,22 »
m	69,63 + 5,55 (M_I)	= 75,18 »
f	69,96 + 5,18 (M_{II})	= 75,14 »
f	73,81 + 1,44 (N_I)	= 75,25 »
t. f.	74,79 + 0,32 (O_I)	= 75,11 »
	Moyenne	= 75,19 keV

F	64,80 + 21,75 (L_I)	= 86,55 keV
m	65,55 + 20,94 (L_{II})	= 86,49 »
m	80,99 + 5,55 (M_I)	= 86,54 »
f	81,34 + 5,18 (M_{II})	= 86,52 »
f	85,03 + 1,44 (N_I)	= 86,47 »
t. f.	86,05 + 0,32 (O_I)	= 86,37 »
	Moyenne	= 86,49 keV

m	81,98 + 21,75 (L_I)	= 103,73 keV
f	82,61 + 20,94 (L_{II})	= 103,55 »
f	98,23 + 5,55 (M_I)	= 103,78 »
f	102,23 + 1,44 (N_I)	= 103,67 »
t. f.	103,40 + 0,32 (O_I)	= 103,72 »
	Moyenne	= 103,69 keV

Ces trois rayonnements γ présentent les mêmes caractéristiques de conversion ; les deux raies de conversion en L_I et en L_{II} ont des intensités dans le rapport 10 : 1 ; pour les deux rayonnements γ plus intenses (75 et 86 keV) nous avons pu observer la conversion en M_{II} et le rapport des intensités est encore de l'ordre $M_I : M_{II} \simeq 10 : 1$. Ce type de conversion est caractéristique des rayonnements $M1$ purs ; un faible mélange en photons de $E2$ (1 %) aurait été parfaitement détectable.

Rayonnement γ de 271 keV. — Le tableau suivant contient les raies de conversion de ce rayonnement que nous avons pu observer :

f	249,8	+ 20,9	(L_{II})	= 270,7	keV
t. f.	253,4	+ 17,2	(L_{III})	= 270,6	»
t. f.	265,5	+ 5,2	(M_{II})	= 270,7	»
	Moyenne			= 270,7	keV

La conversion de ce rayonnement présente la caractéristique d'avoir un coefficient de conversion pour la couche K inférieur à celui des sous-niveaux L. D'autre part, la conversion en L_{II} est supérieure à celle de L_{III}. Ces deux faits conduisent à penser que le rayonnement γ de 271 keV est un rayonnement électrique de polarité 3, 4 ou 5 ou un mélange $M + E$ à prédominance électrique.

Rayonnements γ de 299,6 keV, 311,5 keV et 339,9 keV. — Le classement des raies de conversion de ces rayonnements est fait dans les tableaux suivants :

F	184,1	+ 115,6	(K)	= 299,7	»
F	277,9	+ 21,8	(L_I)	= 299,7	»
f	278,8	+ 20,9	(L_{II})	= 299,7	»
m	294,0	+ 5,5	(M_I)	= 299,5	»
f	298,0	+ 1,4	(N_I)	= 299,4	»
	Moyenne			= 299,6	keV

t. F.	196,0	+ 115,6	(K)	= 311,6	keV
t. F.	289,6	+ 21,8	(L_I)	= 311,4	»
m	290,6	+ 20,9	(L_{II})	= 311,5	»
F	305,9	+ 5,5	(M_I)	= 311,4	»
m	310,1	+ 1,4	(N_I)	= 311,5	»
f	311,1	+ 0,3	(O_I)	= 311,4	»
	Moyenne			= 311,5	keV

F	224,4	+ 115,6	(K)	= 340,0	keV
F	318,1	+ 21,8	(L_I)	= 339,9	»
m	319,1	+ 20,9	(L_{II})	= 340,0	»
f	322,5	+ 17,2	(L_{III})	= 339,7	»
m. F.	334,3	+ 5,5	(M_I)	= 339,8	»
m	338,6	+ 1,4	(N_I)	= 340,0	»
f	339,6	+ 0,3	(O_I)	= 339,9	»
	Moyenne			= 339,9	keV

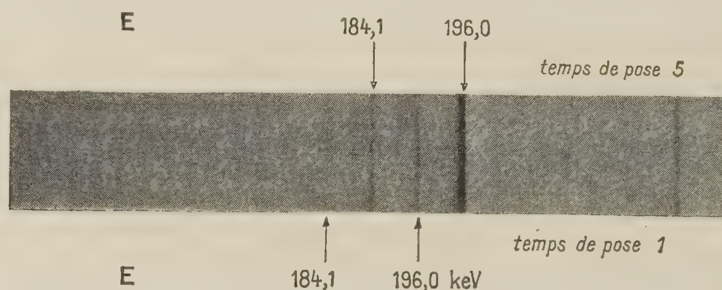


Fig. 11. — Comparaison des intensités des raies de 184,1 et 196,0 keV.

Les raies de conversion dans la couche K de ces trois rayonnements γ sous les raies K les plus intenses du spectre. Comme le rapport des intensités de ces trois raies était assez différent d'après les auteurs, nous avons cru utile de faire une nouvelle détermination. Nous avons fait sur une même plaque deux poses avec des temps d'exposition différents (*fig.* 11) ; la comparaison, au microdensitomètre Vassy, des raies des deux spectres permet de déterminer les intensités relatives (*fig.* 12). Les résultats sont inscrits sur le tableau suivant :

Intensités relatives

Raies (keV)	Elliott	Brodie	Ong	Nos résultats
184,1	10	4	22	19
196,0	100	100	100	100
224,4	10	8	10	9 à 10

Comme on voit, l'accord est entièrement satisfaisant pour la raie de 224,4 keV tandis que la valeur obtenue pour la raie de 184,1 keV confirme le résultat de Ong. Remarquons que le pouvoir séparateur de notre appareillage nous a permis de



FIG. 12. — Microphotogramme de comparaison des intensités des raies de 184,1 et 196,0 keV (voir *fig.* 11).
La raie B (196,0 keV) correspond à un temps de pose unité et les raies A (184,1 keV) et C (196,0 keV) à un temps de pose cinq fois plus long.

séparer entièrement les raies de 184,1 et 196,0 keV (voir *fig.* 3) tandis que les auteurs qui nous ont précédés étaient obligés de décomposer l'ensemble des deux raies. L'intensité de la raie de 184,1 keV (conversion K du rayonnement γ de 229,6 keV) joue un rôle important dans l'établissement du schéma de niveaux.

En ce qui concerne la conversion dans la couche L nous avons pu observer, pour la première fois, la conversion dans le sous-niveau L_{II} de ces trois rayonnements γ ; pour les trois rayonnements le rapport des intensités $L_I : L_{II}$ est de l'ordre de 10. Les raies de conversion en L_{III} des rayonnements γ de 299 et 311 keV sont cachées par des raies intenses et la raie de conversion, dans le même sous-niveau, du rayonnement γ de 339,9 keV a une intensité très inférieure à L_{II}.

Ong a classé, d'après le rapport K/L, les rayonnements γ de 229,6 ($K/L = 6,3$) et 339,9 keV ($K/L = 5,5$) comme $M1$ purs et le rayonnement de 311,5 keV comme un mélange $M1 + E2$ ($K/L = 4,0$). Le fait que nous employons comme détecteur le film photographique ne nous permet pas de déterminer avec précision le rapport K/L étant donné la différence des énergies de ces deux raies, mais nous avons pu déterminer le rapport entre les raies L_I de ces trois rayonnements de la même façon que nous l'avons fait pour les raies K. Nous avons trouvé que le rapport des intensités des trois raies L_I est le même que pour les trois raies K : L_I (γ 299,6 keV) : L_I (γ 311,5 keV) : L_I (γ 339,9 keV) = 20 : 100 : 9. Il est, par conséquent, légitime de conclure que le rapport K/L est le même pour les trois rayonnements γ. Par ailleurs, les caractéristiques de la conversion de ces rayonnements γ dans la couche L nous conduisent à classer ces trois rayonnements comme dipôles magnétiques purs.

RAYONNEMENTS γ DE 374,5 KEV, 397,9 KEV ET 415,2 KEV. — Le classement des raies de conversion de ces rayonnements est fait dans les tableaux suivants :

m	258,9 +	115,6 (K)	= 374,5 keV
m	354,0 +	20,9 (L_{II})	= 374,9 »
t. f.	357,8 +	17,2 (L_{III})	= 375,0 »
t. f.	369,5 +	5,2 (M_{II})	= 374,7 »
t. t. f.	373,2 +	1,3 (N_{II})	= 374,5 »
	Moyenne	....	= 374,7 keV

m	282,3 +	115,6 (K)	= 397,9 keV
m	377,1 +	20,9 (L_{II})	= 398,0 »
f	380,7 +	17,2 (L_{III})	= 397,9 »
f	392,8 +	5,2 (M_{II})	= 398,0 »
t. f.	396,5 +	1,3 (N_{II})	= 397,8 »
	Moyenne	....	= 397,9 keV

m	299,6 +	115,6 (K)	= 415,2 keV
m	394,2 +	20,9 (L_{II})	= 415,1 »
t. f.	398,0 +	17,2 (L_{III})	= 415,2 »
f	410,3 +	5,2 (M_{II})	= 415,5 »
t. f.	414,0 +	1,3 (N_{II})	= 415,3 »
	Moyenne	....	= 415,3 keV

Les raies de conversion en K de ces trois rayonnements γ ont des intensités dans l'ordre suivant : K (415 keV) > K (398 keV) > K (374 keV). Les trois raies de conversion en L_{II} ont des intensités disposées suivant le même ordre ; on peut dire que pour ces trois rayonnements γ le rapport K/L est sensiblement le même et certainement supérieur à 2. D'autre part, la raie de conversion en L_{II} est plus intense que celle en L_{III}, le rapport étant de l'ordre de 3. D'après ces rapports, ces trois rayonnements γ pourraient être des $E2$, mais il faudrait des mesures d'intensité plus précises pour être certain de cette attribution.

Remarquons finalement que la raie de 357,8 keV que nous avons admise comme correspondant à la conversion dans la couche L_{III} du rayonnement de 374,7 keV avait été interprétée auparavant comme la conversion dans la couche K d'un rayonnement γ de 475 keV. Nous ne croyons pas que cette interprétation soit à retenir, soit parce que l'examen comparatif de la conversion des trois rayonnements γ (374,7 keV ; 397,9 keV et 415,3 keV) justifie l'attribution de cette raie à la conversion en L_{III}, soit parce que nous n'avons pu observer aucune autre raie de conversion dans les niveaux L, M, ... d'un rayonnement γ de 475 keV,

malgré les recherches que nous avons faites spécialement dans ce but.

Dans le tableau II nous avons comparé les énergies des rayonnements γ obtenues par les différents auteurs. Toutes les déterminations ont été faites, comme nous l'avons dit, par spectrographie des électrons de conversion, à l'exception de celle de Browne qui a employé un spectrographe à cristal du type Cauchois.

TABLEAU II

Rayonnements γ de la transmutation ^{233}Pa → ^{233}U (énergie en keV)

Browne	Keller et Cork	Brodie	Ong	Présent travail
—	—	17 ?	15,7	—
28,67	28,9	29	27,5	28,45
40,47	40,6	41	40,1	40,23
—	58,1	58	57,6	—
75,4	75,7	76	74,8	75,19
87,0	87,1	87	86,2	86,49
—	104,5	104	103,7	103,7
—	272,6	272	271,6	270,7
—	301,5	301	300,9	299,6
—	313,1	313	312,6	311,5
—	342,0	342	340,8	339,9
—	376,5	—	375,9	374,7
—	399,9	400	400,3	397,9
—	416,4	417	416,7	415,3
—	—	—	(475,6)	—

Pour les faibles énergies, les valeurs que nous avons obtenues sont inférieures à celles de Browne d'environ 0,2 keV. Il semble pourtant que les mesures de Browne étaient systématiquement élevées ; ainsi, par exemple, tandis que Browne a obtenu pour le rayonnement γ le plus intense de la transmutation ^{241}Am → ^{237}Np la valeur 59,78 keV, les mesures beaucoup plus précises de Day ont conduit à la valeur 59,568 ± 0,017 keV. On voit que la différence est du même ordre de grandeur que celle que nous trouvons.

Pour les énergies supérieures à 270 keV nos valeurs sont systématiquement inférieures ; on doit remarquer que la différence provient en partie de la mesure des énergies des raies d'électrons de conversion, mais surtout du fait que nous avons classé d'une façon différente les raies. Ainsi, par exemple, tandis que Ong considérait que la conversion du rayonnement de 416,7 keV s'effectuait dans les niveaux K, L_{I}, M_{I} et N_{I}, nous avons admis que cette conversion se réalisait en K, L_{II}, L_{III}, M_{II} et N_{II} ; il est évident que dans ces circonstances, même si l'énergie des raies de conversion était la même, l'énergie déduite pour le photon γ serait différente.

Schéma de niveaux. — Comme résultat de leurs recherches sur le spectre d'électrons de conversion, Keller et Cork ont proposé pour l'Uranium 233, résultant de la transmutation β du proctactinium, le schéma de niveaux représenté dans la figure 13*a*.

Ce schéma traduisait parfaitement les relations numériques simples qu'on pouvait établir entre les

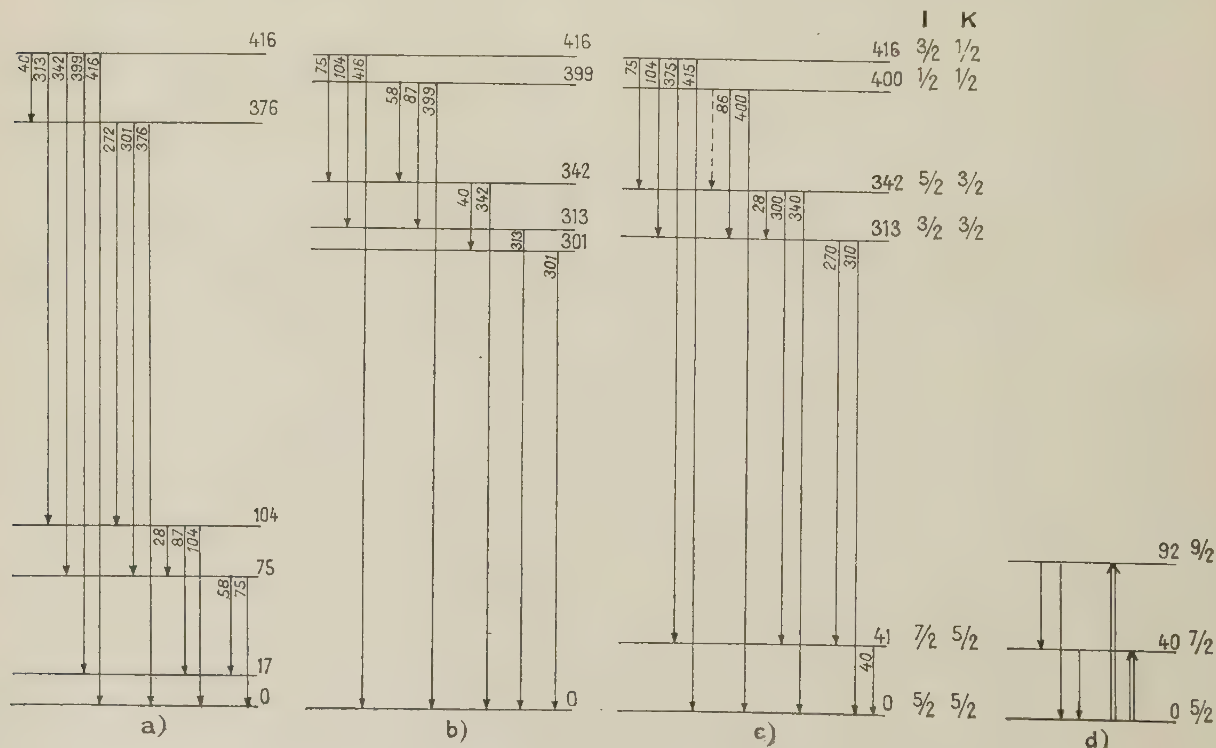


Fig. 13.

énergies des différents rayonnements γ ; évidemment ce schéma ne tenait pas compte des intensités relatives des différents rayonnements γ, qui n'avaient été appréciés que visuellement, ni des spectres continus partiaux jusqu'alors inconnus.

Les déterminations par Elliott et Underhill concernant le spectre continu venaient rendre inacceptable ce schéma ; en effet, ces auteurs ont pu décomposer le spectre continu en trois spectres ayant leurs maxima à 565,256 et ~ 140 keV. Basés sur cette analyse et sur les intensités relatives des rayonnements γ, Elliott et Underhill ont proposé un nouveau schéma de niveaux représenté dans la figure 13 *b*. Ce schéma est en partie analogue à celui de Keller et Cork ; en effet, les niveaux du schéma *a* placés à 0, 17, 75 et 104 keV se retrouvent maintenant en haut du schéma *b* respectivement à 416, 399, 342 et 313 keV ; la différence entre les deux schémas réside dans le fait que le niveau de 376 keV (schéma *a*) occupe dans le schéma *b* la position à 301 keV. Cette différence provient essentiellement du fait que Elliott et Underhill n'avaient pas observé les rayonnements γ de 272 et 376 keV correspondant sur le schéma *a* aux transitions $376 \rightarrow 104$ et $376 \rightarrow 0$. En effet, sur le schéma de Elliott et Underhill, il n'y a pas de place pour les transitions correspondant aux γ de 272 et 376 keV.

Lorsque Brodie a affectué ses recherches il s'est attaché particulièrement à vérifier si ces rayonnements γ existaient ou non dans la transmutation $^{233}Pa \rightarrow {}^{233}U$. Il a pu confirmer l'existence du rayonnement γ de 272 keV et ce fait l'a conduit à déplacer le niveau de 301 keV (schéma *b*) vers 40 keV (schéma *c*). Comme il est aisé de le voir ce schéma proposé par Brodie est exactement le schéma de Keller et Cork, mais inversé ; le rayonnements γ de 272 keV et 376 keV y trouvent, par conséquent, leur place et le rayonnement γ de 301 keV qui, dans le schéma *b*, correspondait à une transition directe au niveau fondamental, devient maintenant le rayonnement émis dans la transition entre les niveaux $341 \rightarrow 40$ keV. C'est ce schéma de Brodie qui a été adopté par Ong.

Les recherches par excitation coulombienne du noyau d'Uranium ^{233}, effectuées par Newton [9] ont apporté une confirmation à l'existence de ce niveau à 40 keV au-dessus du niveau fondamental. En effet, Newton a observé trois rayonnements γ de $40{,}4 \pm 0{,}2$ keV, $51{,}5 \pm 0{,}5$ keV et $92{,}3 \pm 1$ keV correspondant au schéma de la figure 13 *d*. Des probabilités de transitions observées pour les différents rayonnements γ, on déduit que les rayonnements de 51 keV et 40 keV sont des mélanges $M1 + E2$ dans la proportion, en photons, de $20\ \%\ M1 + 80\ \%\ E2$.

Le schéma *c* sur lequel nous avons marqué les valeurs de spin proposées par Newton [9] est en accord :

1) avec les énergies des divers rayonnements γ observés,

2) avec la polarité des γ de 28, 75, 86, 104, 300, 310 et 375 keV.

Par contre, il ne permet d'expliquer ni les polarités que nous proposons pour les rayonnements γ de 270 et 416 keV, ni la non observation du rayonnement γ de 58 keV. En effet, l'intensité de ce rayonnement d'après le schéma (*c*) devrait être environ la moitié de celle de 86 keV, or le fait qu'il n'ait pu être décelé sur nos clichés montre que son intensité est au moins 20 fois plus faible que celle du rayonnement de 86 keV.

De plus, il est évident que l'acceptation du schéma *c* implique que le nombre de transitions de $40 \rightarrow 0$ ne soit pas inférieur au nombre de transitions qui, à partir des niveaux supérieurs, aboutissent au niveau de 40 keV. Ces transitions sont celles de 272 keV, 300 keV et 376 keV. La probabilité des transitions de 272 et 376 keV est faible par rapport à celle de 300 keV et, on peut, en conséquence, ramener la discussion aux deux rayonnements de 40 keV et 300 keV. On remarquera que dans les deux schémas *b* et *c* ces deux rayonnements sont en cascade, mais, tandis que dans le schéma *b* la cascade s'effectue dans l'ordre de 40 keV (transition $342 \rightarrow 301$) 301 (transition $301 \rightarrow 0$), dans le schéma *c* l'ordre est inversé, le rayonnement de 301 est émis d'abord (transition $341 \rightarrow 40$) et le rayonnement de 40 vient ensuite. En résumé, tandis que dans le schéma *b* c'est le rayonnement de 301 keV qui doit avoir une intensité égale ou supérieure à celle de 40 keV, dans le schéma *c* c'est l'inverse qui est vrai.

Malheureusement, il manque des mesures précises des intensités de ces deux rayonnements. Le seul auteur qui a mesuré les deux rayonnements c'est Brodie et il a trouvé que les deux avaient la même intensité ; or, les mesures d'Ong, que nous avons confirmées, ont montré que le rayonnement de 301 keV est cinq fois plus intense (voir tableau) qu'on ne le croyait d'après les mesures de Brodie. Pour accepter le schéma *c* il faudrait, par conséquent, conclure que la mesure de l'intensité du rayonnement de 40 keV, faite par Brodie, était entachée d'une erreur du même ordre de grandeur. Il nous a paru, de ce fait, intéressant d'essayer de comparer les intensités des raies de conversion des rayonnements de 40 et 300 keV, malgré les difficultés que comporte une telle comparaison lorsqu'on emploie la plaque photographique comme moyen de détection.

Pour effectuer cette détermination, nous avons pris comme spectre de comparaison, calibré en intensités, le spectre du dépôt actif du thoron. Nous avons admis les intensités déterminées soit par Flammersfeld [4], soit par Krisyouk et al. [7] et par Zhernovoy et al. [13] ; les différences entre les résultats de ces auteurs sont d'ailleurs faibles.

Pour les raies de conversion du rayonnement de 40 keV du Pa → U, nous avons employé comme étalons les raies Aa, B et Bb du spectre du Th *C* → Th *C″* (rayonnement γ de 40 keV) et pour les raies de conversion du rayonnement de 300 keV (Pa → U), les raies *H* et *I* du spectre Th *B* → Th *C*. On activait une source de ^{233}Pa dans une atmosphère de thoron et on obtenait simultanément pour les deux spectres toute l'étendue de la gamme des énergies à étudier, ce qui permettait de négliger l'intensité de la source, sa décroissance et le temps de pose.

Nous avons trouvé que le nombre de transitions de 40 keV était 3 à 4 fois plus faible que le nombre de transitions de 300 keV. Au cas où cette conclusion serait confirmée, la cascade 300,40 correspondant aux transitions 340 → 40 → 0 deviendrait inacceptable et on serait alors tenté d'admettre un niveau à 300 keV, comme sur le schéma d'Elliott et Underhill.

Il ne nous semble pas que dans les conditions présentes d'incertitude sur le schéma de niveaux à adopter on puisse faire avancer la discussion sur les caractéristiques des différents niveaux.

Conclusions. — L'étude du spectre d'électrons de conversion émis au cours de la transmutation ^{233}Pa → ^{233}U nous a permis de :

a) montrer que certaines raies de conversion sont, en effet, des doublets ou même des triplets et d'observer dix-neuf raies nouvelles ;

b) augmenter la précision sur la mesure des énergies et, par conséquent, rendre plus précise l'attribution des raies aux différents niveaux de conversion ; ce classement nous a conduits à éliminer le rayonnement γ de 57 keV jusqu'à maintenant admis et nous avons montré qu'il n'y a pas de raison expérimentale pour admettre, non plus un rayonnement γ de 476 keV ;

c) établir sans ambiguïté la nature et la polarité des rayonnements γ de 28, 40, 75, 86, 104, 300 et 340 keV ; il reste à préciser la nature et la polarité des rayonnements γ de 271, 375, 398 et 415 keV ;

d) montrer que nos mesures — malheureusement peu précises — des intensités relatives des rayonnements de 40 et de 300 keV rendent difficile l'acceptation du schéma de niveaux actuellement admis pour l'Uranium 233 descendant de la transmutation β du Protactinium 233.

Nous remercions bien vivement M. Vernois et Mme Pluchet qui ont bien voulu préparer les nombreuses sources employées dans ce travail.

Manuscrit reçu le 23 mars 1959.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Alder (K.), Bohr (A.), Huus (T.), Mottelson (B.) et Winther (A.), *Rev. mod. Phys.*, 1956, **28**, 432.
[2] Brodie (W. D.), *Proc. Phys. Soc.*, London, 1954, **67** A, 397.
[3] Elliott (L. G.) et Underhill (A. B.), Report HAR 761, 1952.
[4] Flammersfeld (A.), *Z. Physik*, 1939, **114**, 227.
[5] Haggstrom (E.), *Phys. Rev.*, 1941, **59**, 322.
[6] Keller (H. B.) et Cork (J. M.), *Phys. Rev.*, 1950, **79**, 1030.
[7] Krisyouk (E. M.), Sergeyev (A. G.), Latyshev (G. D.) et Vorobyov (V. D.), *Nuclear Physics*, 1957, **4**, 579.
[8] Lévy (P. W.), *Phys. Rev.*, 1947, **72**, 352.
[9] Newton (J. O.), *Nuclear Physics*, 1958, **5**, 218.
[10] Ong (P. H.) et Sizoo (G. J.), *Physica*, 1954, **20**, 77. Ong (P. H.) et Kramer (P.), *Physica*, 1955, **21**, 276. Ong (P. H.), *Thèse*, Amsterdam.
[11] Rosenblum (S.), Valadares (M.) et Milsted (J.), *J. Physique Rad.*, 1957, **18**, 609.
[12] Siegbahn (K.) et Edvarson (K.), *Nucl. Phys.*, 1956, **1**, 137.
[13] Zhernovoy (A. I.), Krisyouk (E. M.), Latyshev (G. D.), Remenny (A. S.), Sergeyev (A. G.) et Fadeyev (V. I.), *Exptl. Theoret. Phys.*, U. R. S. S., 1957, **32**, 682.

LETTRES A LA RÉDACTION

EFFETS DES CHAMPS ÉLECTRIQUES ALTERNATIFS ET CONTINUS SUR LA LUMINESCENCE DE CERTAINS SULFURES DE ZINC EXCITÉS PAR UN RAYONNEMENT α.

Par A. Coche et R. Henck,
Laboratoire de Chimie Nucléaire,
Faculté des Sciences de Strasbourg.

Le renforcement par un champ électrique de la luminescence de certains sulfures de zinc a été observé par plusieurs auteurs dans différentes conditions : avec des champs alternatifs, sur des cellules où le scintillateur, excité par un rayonnement X, est dispersé dans un diélectrique (Destriau [1]), avec des champs continus sur des cellules constituées par des films minces de scintillateur obtenus par vaporisation et excités par un rayonnement ultra-violet, (Cusano [2]) ; Mattler [3] a signalé un renforcement de la luminescence provoquée par irradiation, aux rayons α, d'un sulfure de zinc et de cadmium, activé au manganèse et à l'argent.

Nous avons examiné l'influence de champs électriques alternatifs et continus sur la luminescence de sulfures mixtes de zinc et de cadmium (1), activés au manganèse en proportion variable (A : 10^{-2} g Mn/g SZnCd, B : 10^{-3} g Mn/g SZnCd, C : 10^{-4} g Mn/g SZnCd) et excités par les particules α de ^{210}Po. Les cellules sont constituées par une couche (épaisseur environ 100 μ) de scintillateur dispersé dans un poids égal d'araldite, déposée sur une lame de verre conducteur. La deuxième électrode est formée d'une fine pellicule d'argent (obtenue par vaporisation), à travers laquelle se fait l'irradiation α. Dans toutes les expériences, la luminance est mesurée par l'intermédiaire du courant d'anode du photomultiplicateur 53 AVP sur la cathode duquel repose la cellule.

L'application d'une même tension alternative, inférieure au seuil d'électroluminescence, à diverses cellules excitées par des rayons α, provoque une variation de l'intensité de la lumière émise, différente suivant les scintillateurs utilisés, comme le montre la figure 1. Sur cette dernière, on a porté, en fonction du temps t, pour trois cellules réalisées respectivement avec les sincillateurs A, B et C, le rapport de la luminance $L_{\alpha+V}$ (sous l'action simultanée des rayons α et de la tension V) à la luminance L_α (sous la seule action des rayons α). Le rapport $(L_{\alpha+V})/L_\alpha$ représente le coefficient d'amplification ρ tant que la contribution de l'électroluminescence L_V est nulle. Dans le domaine de tensions supérieures au seuil d'électroluminescence (de l'ordre de 200 volts), ρ est défini par la relation : $\rho = (L_{\alpha+V} - L_V)/L_\alpha$.

Le coefficient d'amplification n'est supérieur à 1 que pour les scintillateurs A et B, le scintillateur C donnant un effet extincteur.

(1) Fournis par les Établissements Massiot-Fluor.

La variation de ρ en fonction de la tension V est représentée sur la figure 2. Pour le scintillateur B, on a étudié séparément les effets produits dans les deux bandes d'émission de ce scintillateur, en interposant,

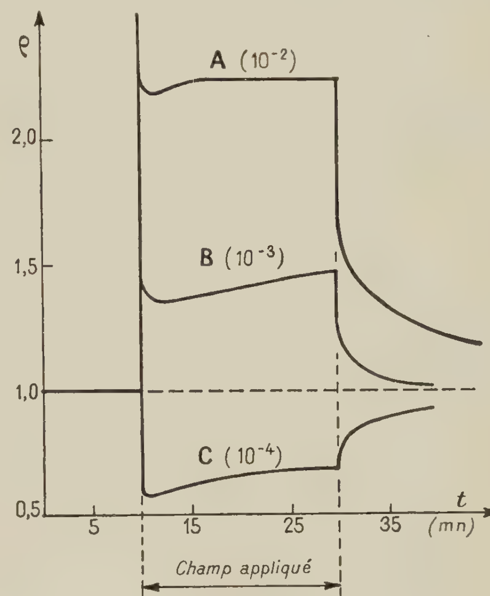


Fig. 1.

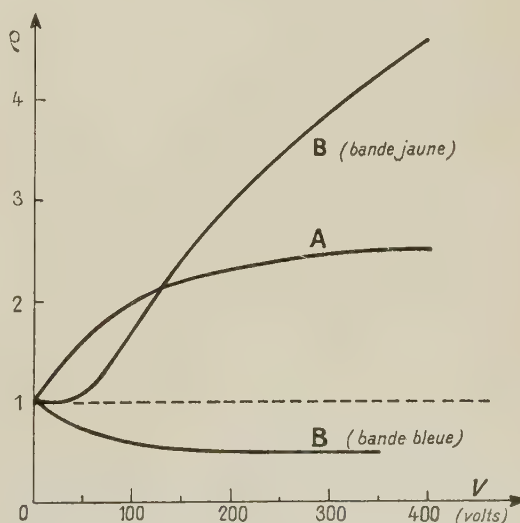


Fig. 2.

entre la cellule et la photocathode, des filtres appropriés. On constate que le champ électrique provoque un effet renforçateur prononcé, augmentant constamment avec la tension, dans la bande d'émission de plus

grande longueur d'onde (bande jaune) et au contraire un effet extincteur dans la bande bleue. Gobrecht et Gumlich ont observé un comportement analogue dans le cas d'une excitation par des rayons X [4] et des rayons cathodiques [5]. Pour le scintillateur A, qui ne possède qu'une seule bande d'émission, le coefficient d'amplification ρ tend vers une valeur constante pour les tensions élevées. Ce résultat est à rapprocher de celui obtenu en irradiant le scintillateur par des rayons X [1].

En appliquant aux scintillateurs A, B et C des tensions continues, on constate également des modifications durables de la luminescence excitée par un rayonnement α. La figure 3 montre, par exemple, en fonction du temps t, la variation de l'intensité de la lumière émise, consécutive à l'application d'une tension continue V à la cellule A.

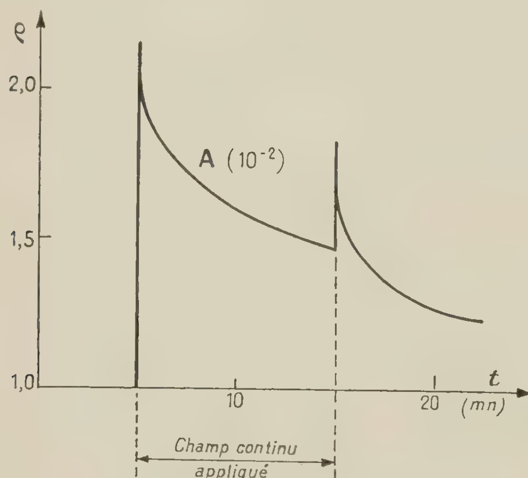


Fig. 3.

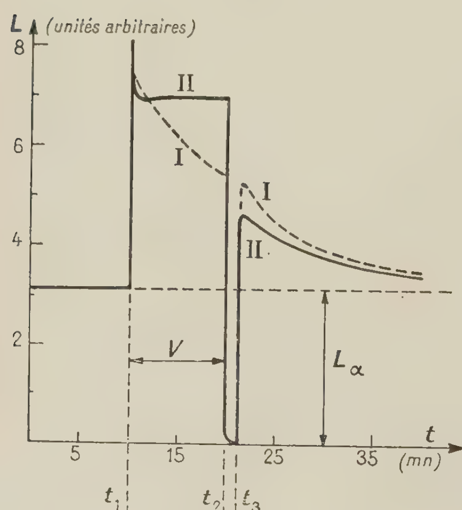


Fig. 4.

La diminution continuelle du renforcement observé provient de la formation progressive d'un champ de polarisation [6] réduisant la valeur du champ efficace. A la coupure de la tension, le champ de polarisation formé subsiste et agit de la même manière qu'un champ extérieur, produisant une nouvelle stimulation de la luminescence.

Les variations de l'intensité de la luminescence excitée par des rayons α, obtenues par application de tensions continues, sont qualitativement les mêmes que celles observées avec des tensions alternatives. Ainsi le scintillateur A donne toujours un effet de stimulation, tandis que le scintillateur C ne donne qu'un effet extincteur.

Destriau [7] a signalé récemment un effet de mémoire lié à l'effet renforçateur produit par des champs alternatifs, de la luminescence excitée par les rayons X. Nous avons trouvé un effet analogue en irradiant par des rayons α les scintillateurs A et B, soumis à des champs électriques tant alternatifs que continus, comme le fait ressortir la figure 4. Le scintillateur est sensibilisé par action simultanée d'un rayonnement α et d'un champ électrique, pendant un intervalle de temps $t_2 - t_1$. A l'instant t_2 on supprime l'excitation α et on coupe la tension. Si on maintient le scintillateur dans l'obscurité pendant un intervalle de temps $t_3 - t_2$ (qui peut dépasser plusieurs heures) et si on l'excite ensuite à nouveau avec le même faisceau de rayons α qu'initialement, la luminance prend des valeurs supérieures pendant plusieurs dizaines de minutes à la valeur initiale L_α. L'effet est plus marqué avec une tension continue (courbe I) qu'avec une tension alternative de valeur efficace égale à celle de la tension continue (courbe II).

L'application d'une tension continue à un scintillateur A ou B, en l'absence de tout rayonnement α, provoque également une sensibilisation de celui-ci. La figure 5 montre les résultats obtenus avec le scintillateur B (dans la bande d'émission jaune). La tension continue appliquée au scintillateur pendant un intervalle de temps $t_2 - t_1$ ne produit aucune émission de lumière par électroluminescence. Mais si l'on soumet le scintillateur à une excitation α, quelques instants

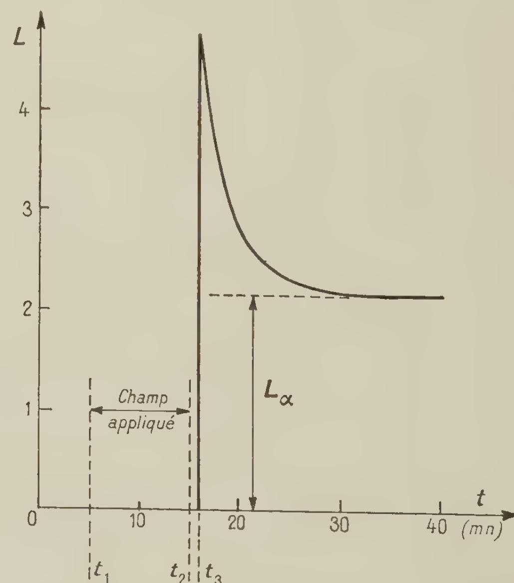


Fig. 5.

après la coupure de la tension, l'intensité de la lumière émise passe par un maximum, dont la valeur dépend de celle de la tension appliquée précédemment, de la durée de son application et de l'intervalle de temps entre la suppression de la tension et le début de l'irradiation α.

Des résultats d'ensemble sur ces différents effets seront publiés ultérieurement.

Lettre reçue le 15 juin 1959.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Destriau (G.), Mattler (J.), Destriau (M.) et Gumlich (H.-E.), *J. Electrochem. Soc.*, 1955, **102**, 682.
[2] Cusano (D. A.), *Phys. Rev.*, 1955, **98**, 546.
[3] Mattler (J.), *J. Physique Rad.*, 1956, **17**, 758.
[4] Gobrecht (H.) et Gumlich (H. E.), *J. Physique Rad.*, 1956, **17**, 754.
[5] Gobrecht (H.), Gumlich (H. E.), Nelkowski (H.) et Langer (D.), *Z. Physik*, 1957, **149**, S 504.
[6] Kallmann (H.) et Rosenberg (B.), *Phys. Rev.*, 1955, **97**, 1596.
[7] Destriau (G.), *Z. Physik*, 1958, **150**, S 447.

EFFETS MAGNÉTIQUES D'IMPURETÉS DE TRANSITION DANS L'ALUMINIUM

Par M. Michael Alan Taylor,
Cavendish Laboratory, Cambridge,

et MM. Jean-Paul Burger et Jules Wucher,
Laboratoire Pierre-Weiss, Institut de Physique, Strasbourg.

Le manganèse, le chrome et le vanadium forment avec l'aluminium des solutions solides, à la température de l'eutectique, jusqu'à de faibles concentrations de 0,67, 0,37 et 0,20 % atomique respectivement [1]. Les divers alliages ont été préparés au four à induction dans le vide à partir d'aluminium 99,99 de manganèse 99,99, de chrome 99,90 et de vanadium 99,50. Maintenus pendant 12 heures quelques degrés au-dessus du point de fusion, puis recuits pendant 12 heures à la température de l'eutectique, les divers alliages ont été trempés dans l'eau.

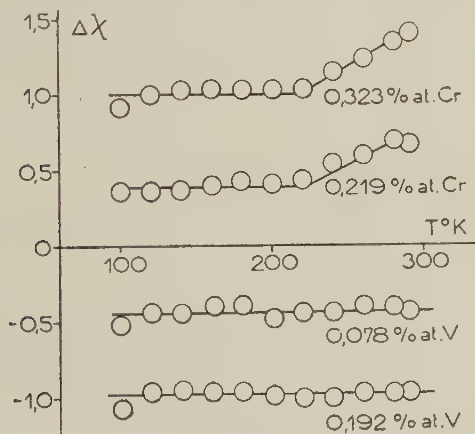


Fig. 1.

En vue des mesures magnétiques, effectuées à la balance de translation Foëx-Forrer, les culots d'alliages ont été tournés sous forme de cylindres de dimensions et poids sensiblement égaux, ceci pour obtenir une précision relative aussi grande que possible.

Les résultats de l'étude thermomagnétique effectuée entre 90 °K et 290 °K sont rassemblés dans le tableau suivant.

Mesurés dans trois champs, les divers échantillons préalablement lavés dans NaOH et HCl, puis séchés dans l'éther, n'ont montré à température ambiante aucune dépendance de χ avec le champ. Dans la figure 1 nous avons porté en fonction de la température la valeur $\Delta\chi = \chi_M - \chi_A$ (où χ_M est la susceptibilité moléculaire de l'alliage et χ_A la susceptibilité atomique de l'aluminium pur) dans le cas du vanadium et du chrome. L'addition de vanadium fait décroître le paramagnétisme de l'aluminium d'une quantité indépendante de la température entre 100 °K et 290 °K. Rapportée au vanadium seul, cette décroissance correspondrait à un χ diamagnétique de — 950. On pourrait attribuer cet effet à une valeur élevée du diamagnétisme de Landau. Cet effet est à rapprocher du fort diamagnétisme mesuré à température ambiante par Auer [2] dans le cas du Li (— 293) Cu (— 146) Ag (— 93) Mg (— 155) Zn (— 156) en solutions diluées dans l'aluminium.

Vogt [3] a signalé que les alliages dilués AlMn ont une forte valeur de Δχ, indépendante de la température. Dans la figure 2 nous avons porté les Δχ déduits de nos mesures pour quatre concentrations de manganèse. En première approximation ces Δχ sont constantes avec la température et leurs valeurs moyennes portées en fonction de la concentration de l'élément ajouté (*fig.* 3) sont en excellent accord avec les valeurs de Vogt. Rapportée au Mn seul, cette augmentation correspondrait à un χ paramagnétique

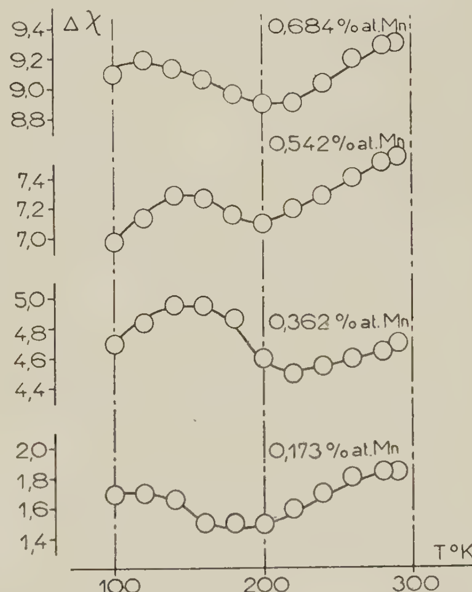


Fig. 2.

TABLEAU

Aluminium	T °K	98	123	142	169	188	209	226	253	271	290
	χ_A	19,20	18,67	18,58	18,26	17,99	17,86	17,69	17,20	16,92	16,72
Al-Mn	T °K	104	120	141	180	197,5	218	240	250	271	290
0,173 at. % Mn	χ_M	20,68	20,55	20,09	19,63	19,50	19,34	19,17	19,01	18,75	18,55
Al-Mn	T °K	98	117	138	157	181	196	215	233	250	289
0,362 at. % Mn	χ_M	23,89	23,61	23,51	23,45	23,07	22,76	22,29	22,14	21,86	21,42
Al-Mn	T °K	94	110	134	167	190	210	234	255	270	287
0,542 at. % Mn	χ_M	26,15	26,00	25,92	25,58	25,21	25,02	24,75	24,54	24,43	24,32
Al-Mn	T °K	94	141	160	180	194	208	227	241	263	290
0,684 at. % Mn	χ_M	28,35	27,61	27,47	27,23	26,96	26,72	26,58	26,52	26,32	26,04
Al-Cr	T °K	93	111	127	150	169	185	220	255	289	
0,095 at. % Cr	χ_M	19,09	18,91	18,72	18,52	18,32	18,16	17,76	17,47	17,06	
Al-Cr	T °K	102	120	145	171	195	213	242	268	285	
0,219 at. % Cr	χ_M	19,45	19,19	18,81	18,67	18,35	18,24	18,11	17,68	17,52	
Al-Cr	T °K	94	115	146	170	198	232	256	289		
0,323 at. % Cr	χ_M	20,11	19,87	19,60	19,23	19,04	18,70	18,52	18,10		
Al-V	T °K	95	125	170	193	208	224	248	269	290	
0,078 at. % V	χ_M	18,62	18,18	17,84	17,47	17,37	17,17	17,00	16,73	16,29	
Al-V	T °K	94	109	130	162	202	233	250	288		
0,192 at. % V	χ_M	18,08	17,88	17,74	17,37	16,92	16,52	16,44	15,74		

de + 2 650. Contrairement au cas du vanadium les $\Delta\chi$ ne sont pas constants à la précision des mesures (l'erreur sur $\Delta\chi$ est estimée à $\pm$ 0,1), mais présentent autour de 130 °K un maximum étalé.

Remarquons que la forte valeur de $\Delta\chi$ exclut la simple additivité, le χ_A du manganèse étant d'environ + 540 dans cet intervalle de température, et que le maximum en χ, T observé [4] dans Mn α pur au voisinage de 125 °K serait dans ce cas noyé dans les erreurs de mesures.

Les résultats concernant le chrome sont moins nets. L'addition du chrome a pour effet d'augmenter la susceptibilité de l'aluminium d'une grandeur plus

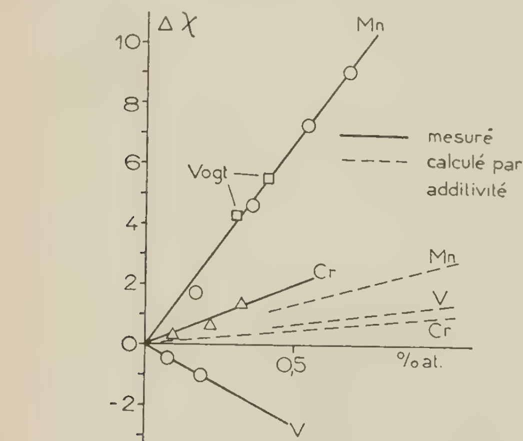


Fig. 3.

faible que dans le cas du manganèse, mais cependant supérieure à ce qu'on obtiendrait par simple additivité (*fig.* 3). Les $\Delta\chi$, pratiquement constantes entre 100 °K et 200 °K augmentent légèrement avec la température (*fig.* 1). Dans la figure 3 nous avons porté les $\Delta\chi$ mesurées à 290 °K.

Une étude théorique [5] du couplage magnétique entre impuretés à grande distance a permis de rendre compte notamment du comportement des alliages à base de métaux nobles (Cu, Ag, Au) avec les métaux de transition (Mn, Cr). Les résultats décrits ci-dessus parlent aussi en faveur de l'existence d'interaction antiferromagnétiques à grande distance des atomes Mn et Cr à faible concentration dans l'aluminium.

Des mesures du coefficient de Hall compléteront cette étude thermomagnétique. Toutefois pour l'alliage à 0,36 % de Mn, le coefficient de Hall coïncide à la précision des mesures (1 %) avec celui de l'aluminium pur.

Lettre reçue le 8 juillet 1959.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Hansen (M.) et Anderko (K.), Constitution of Binary Alloys. McGraw Hill, 1958.
[2] Auer (H.), *Z. Physik*, 1934, **92**, 283.
[3] Vogt (E.), *Appl. Sc. Research*, 1954, B **4**, 1.
[4] Kriessman (C. J.) et McGuire (T. R.), *Phys. Rev.*, 1955, **98**, 936.
[5] Blandin (A.) et Friedel (J.), Colloque International de Magnétisme. *J. Physique Rad.*, 1959, **20**, 160.

MESURE CALORIMÉTRIQUE DE LA PÉRIODE DE ^{90}Y.

Par J. Robert,
Laboratoire Curie.

Nous avons mesuré la période de ^{90}Y avec notre dispositif de microcalorimétrie adiabatique à compensation automatique précédemment décrit [1].

L'yttrium 90 décroît par émission β^- de 2,2 MeV. Sa période a été mesurée par de nombreux auteurs qui

ont utilisé des compteurs : les principales valeurs obtenues sont, par ordre chronologique, les suivantes :

Stewart, Lawson et Cork	(1937)	$T = 60{,}5 \pm 2$ h	[2]
Bothe	(1946)	$T = 61 \pm 1$ h	[3]
Chetham-Strode et Kinderman	(1954)	$T = 64{,}60 \pm 0{,}43$ h	[4]
Volchok et Kulp	(1955)	$T = 64{,}24 \pm 0{,}30$ h	[5]
Schmeling	(1955)	$T = 64{,}2 \pm 0{,}2$ h	[6]
Wright and al.	(1957)	$T = 64{,}4 \pm 0{,}4$ h	[7]

Les quatre derniers auteurs ont mesuré pendant 8 à 10 périodes un certain nombre d'échantillons de ^{90}Y obtenu par séparation à partir de ^{90}Sr.

Nous avons suivi pendant une semaine dans un calorimètre en or pesant 66 g une source de ^{90}Y obtenue par irradiation à la pile EL 3 sous forme d'oxyde Y_2O_3. L'intensité de la source atteignait, au début des mesures, environ 150 millicuries ; l'élévation de la température horaire était de l'ordre de 200 millidegrés.

La source a été mesurée de nouveau, quinze jours après la fin de cette étude : aucune activité anormale n'a été decelée.

L'analyse des points expérimentaux par la méthode des moindres carrés a conduit à la valeur de la période :

$$T = 64{,}3 \pm 0{,}4 \text{ heures.}$$

Ce résultat est en accord avec les précédentes déterminations bien qu'obtenu par une méthode entièrement différente.

Lettre reçue le 10 juillet 1959.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Lecoin (M.) et Robert (J.), *J. Physique Rad.*, 1956, **17**, 150 A. Robert (J.), *Thèse* Doctorat ; *Ann. Physique*, 1959, **4**, 89.
[2] Stewart, Lawson et Cork, *Phys. Rev.*, 1937, **52**, 901.
[3] Bothe, *Z. Naturforsch.*, 1946, **1**, 179.
[4] Chetham-Strode et Kinderman, *Phys. Rev.*, 1954, **93**, 1029.
[5] Volchok et Kulp, *Phys. Rev.*, 1955, **97**, 102.
[6] Schmeling, *Z. Naturforsch.*, 1955, **10 a**, 79.
[7] Wright et all., *Nuclear Sc. Ing.*, 1957, **2**, 427.

ÉTUDE DE LA DIFFUSION RÉSONNANTE DES PHOTONS PAR LE MAGNÉSIUM

Par M. Langevin et A. Bussière de Nercy,
Laboratoire de Physique Nucléaire,
Faculté des Sciences, Orsay.

La diffusion résonnante des photons par le magnésium a été étudiée avec un faisceau de photons de freinage produit par le Bétatron du Laboratoire de Synthèse Atomique du Centre National de la Recherche Scientifique.

Le dispositif expérimental est semblable à celui qui a été déjà employé pour les expériences de diffusion par le niveau de 15,1 MeV de ^{12}C [1], [2]. Le faisceau de photons est défini par un collimateur primaire en plomb et un collimateur secondaire en fer de 80 cm de long. La cible est placée à 4 m de la sortie du collimateur ; une chambre d'ionisation à parois épaisses de graphite [3] permet de mesurer l'intensité du faisceau. Un mur de béton de 2 m sépare le bétatron de la salle d'expériences et le trajet des photons depuis le collimateur jusqu'à la cible se fait dans le vide ; on a placé un aimant permanent destiné à éliminer les électrons du faisceau et un piège en béton derrière la chambre d'ionisation. Les photons diffusés sont détectés par un cristal de NaI(Tl) de 12,5 cm de diamètre et de 15 cm de longueur protégé par une épaisseur de plomb de 10 cm ; les impulsions du détecteur sont analysées par un sélecteur d'amplitude à 50 canaux. Pour réduire le mouvement propre du détecteur, le sélecteur n'admet les impulsions que pendant le temps de passage du faisceau (20 µs) ; le rayonnement détecté en l'absence de cible est ainsi rendu négligeable. L'angle de diffusion est de 135° pour diminuer l'effet des diffusions électroniques prépondérantes vers l'avant et un filtre de 10 cm d'épaisseur de plexiglass placé devant le cristal permet d'arrêter les électrons et d'éviter l'empilement des impulsions correspondant à des photons de faible énergie. La diffusion non résonnante subsistante peut être éliminée par comparaison avec une cible de numéro atomique voisin.

Dans ces conditions on a pu observer la diffusion résonnante par le niveau de 15,1 MeV de ^{12}C déjà étudiée par ailleurs [1], [2]. La valeur de la section efficace intégrée obtenue, $2{,}28 \pm 0{,}45$ MeV.mb est en bon accord avec les résultats des autres auteurs.

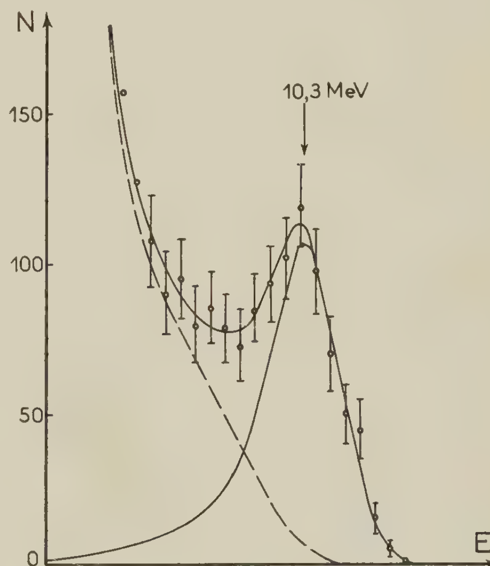


Fig. 1.

Le même phénomène a été observé en étudiant la diffusion du faisceau par une cible de magnésium. Le spectre d'impulsions obtenu avec un faisceau d'énergie maximum 12,5 MeV et une cible de magnésium de 5,72 g/cm² est représenté (*fig.* 1). L'énergie du pic observé a pu être fixée à $10{,}3 \pm 0{,}5$ MeV par comparaison avec les photons de 15,1 MeV de ^{12}C et ceux

de 4,43 MeV d'une source de Po-Be. L'intensité du phénomène a été étudiée en fonction de l'énergie maximum des photons. Au voisinage de l'extrémité du spectre, le nombre de photons d'énergie E varie en bonne approximation comme $\frac{\sqrt{E_m - E}}{E_m}$, E_m étant l'énergie maximum du spectre [4]. Le diagramme obtenu en portant le produit $(I_r . E_m)^2$, I_r étant l'inten-



Fig. 2.

sité de la raie de résonance, en fonction de E_m (*fig.* 2), permet par extrapolation linéaire de fixer l'énergie du niveau excité à 10,50 ± 0,14 MeV.

Le calcul de la section efficace intégrée donne $\int \sigma_s \, dE = 1{,}93 \pm 0{,}4$ MeV.mb, sans tenir compte de l'autoabsorption des photons de 10,5 MeV dans la cible. Si on effectue les corrections nécessaires [2], en prenant pour section efficace d'absorption à la résonance $\sigma_a^0 = 6\pi\lambda\!\!\!^{-2}\, \Gamma_\gamma / \Gamma = 66$ barn, en supposant $\Gamma_\gamma \# \Gamma$, on obtient $\int \sigma_s \, dE = 2{,}24 \pm 0{,}44$ MeV.mb. Il paraît raisonnable, par élimination, d'attribuer ce niveau à ^{24}Mg. La largeur $\Gamma_\gamma = \int \sigma_s \, dE . 2 / \pi\sigma_a^0 = 22 \pm 4$ eV comparée à la largeur théorique $\Gamma_\gamma(M_1) = 0{,}021 . E_\gamma^3 = 24{,}3$ eV donne comme élément de matrice de la transition, $|M(M_1)|^2 = 0{,}89$ en bon accord avec les autres transitions M_1 connues [5], [6]. Ce niveau est probablement produit par excitation dipolaire, ce qui conduit à lui attribuer le spin 1$^+$. Un niveau à 10,46 ± 0,10 MeV a d'ailleurs été déjà observé dans l'étude de la réaction ^{23}Na(d, n)^{24}Mg [7]. Le seuil de la réaction ^{24}Mg(γ, α)^{20}Ne, 9,3 MeV, étant inférieur à l'énergie du niveau excité de 10,5 MeV, l'observation de cette résonance indique que la désexcitation de ce niveau par émission α doit être très peu probable. On peut donc lui attribuer le spin isobarique $T = 1$. Ce niveau du ^{24}Mg serait donc semblable au niveau de 15,1 MeV de ^{12}C déjà étudié par la même méthode.

Lettre reçue le 22 juillet 1959.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Hayward (E.) et Fuller (E. G.), *Phys. Rev.*, 1957, **106**, 991.
[2] Garwin (E. L.), *Phys. Rev.*, 1959, **114**, 143.
[3] Schuhl (C.), *J. Physique Rad.*, 1956, **17**, 97 A.
[4] Schiff (L. I.), *Phys. Rev.*, 1946, **70**, 87.
[5] Wilkinson (D. H.), *Phil. Mag.*, 1956, **1**, Ser. 8, 127.
[6] Warburton (E. K.), *Phys. Rev.*, 1959, **113**, 595.
[7] El Bedewi (F. A.) et El Wahab (M. A.), *Nucl. Physics*, 1957, **3**, 385.

CRYOMÉTRIE DE SELS ALCALINS A ANIONS OXYGÉNÉS DANS LE FLUORURE DE SODIUM

Par M. Ali Seyyedi et M. G. Petit,
Laboratoire de Physique (Enseignement), Sorbonne.

Nous avons montré dans une précédente note [1] que certains oxydes, particulièrement de métaux positifs, étaient solubles dans le fluorure de sodium. On pouvait penser que la solubilité des sels alcalins d'anions oxygénés serait plus prononcée. Cette étude ayant trait alors, à la stabilité des anions dans le solvant choisi.

Nous ferons ici tout d'abord, deux remarques intéressantes :

a) *Le clivage possible d'un anion oxygéné n'est pas cryométriquement décelable, lorsque nous avons le schéma de dissociation :*



$$2[MO_n]^= \rightarrow M_2O_{2n-1} + O^= \quad (1)$$

et lorsque l'oxyde n'est pas coupé dans le solvant considéré, car deux particules initiales donnent deux particules tronçons, que l'anion soit clivé ou non. Ainsi, dans le cas des métaborates, aluminates, métaphosphates et leurs analogues dans la classification de Mendelejeff, l'étude de la structure de l'anion à l'état dissous doit être précédée de l'étude préalable de l'oxyde correspondant dans le même solvant. Le cas de ces anions est en effet, cryométriquement remarquable. Pour l'anion métaborique nous avons en effet *a priori* un type possible de coupure de l'anion $(BO_2)^-$ suivant le schéma général (1) non cryométriquement décelable.

Mais on trouve expérimentalement que : 1° 1$(BO_2)^-$ donne une particule dans FNa ; 2° 1 B_2O_3 est clivé en deux particules dans FNa [7].

Ceci élimine donc la coupure de type (1) qui donnerait trois particules tronçons pour deux particules initiales.

Donc la non coupure expérimentale révèle que la coupure possible de $(BO_2)^-$ en $(BO)^+ + O^=$ ne peut se réaliser (éventuellement) qu'à des dilutions trop élevées pour pouvoir être suivies par des cryométries où le métaborate est le corps dissous.

(Mais si l'oxyde B_2O_3 avait donné une particule

dans un certain solvant le problème eût été alors indéterminé.)

Ainsi l'étude de la coupure d'un oxyde d'un élément trivalent ou pentavalent est préliminaire à l'étude de la coupure de l'anion correspondant.

Par contre les orthophosphates et homologues, les sulfates et homologues donnent des résultats cryométriques directement interprétables de ce point de vue, car n'obéissant pas au schéma n° 1.

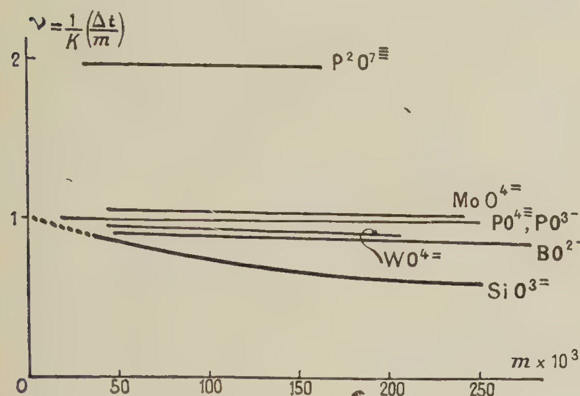


Fig. 1. — ν représente, à la limite de dilution infinie, le nombre de particules étrangères au solvant donné par le corps dissous.

b) L'idéalité, traduite pratiquement par l'horizontalité de la courbe cryométrique dans la représentation de Raoult aux hautes dilutions (aux erreurs d'expérience près et au voisinage de la limite) pour l'anion orthophosphorique, implique que pour des anions tétraédriques (et *a fortiori* pour les plus petits) l'entropie correspondante de forme et dimension n'intervient pas et que seule donc la théorie d'Arrhenius rend compte de la « réalité » en milieu sel fondu électrolyte fort [6].

D'ailleurs dans ce cas et conformément aux résultats expérimentaux de Zarzycki [8] on peut avec Doucet [9] expliquer ce fait en se basant sur la structure très lacunaire de FNa, dont les lacunes logeraient les tétraèdres anioniques sans perturbation notable de la stéréostructure du solvant. Ceci est donc une nouvelle preuve théorique séduisante du bien fondé de l'hypothèse fondamentale que nous avançons plus haut.

Ceci étant posé, nous avons obtenu les résultats suivants :

De nombreux sels sont insolubles ou instables dans le fluorure de sodium, tels les aluminates insolubles, les arséniates, vanadates, stannates, tellurates, instables.

Les métaborates révèlent un non clivage de l'anion $(BO_2)^-$, tout au moins dans les limites de dilution accessibles à l'expérience, et compte tenu de la remarque générale précédente.

Les tétraborates $(B_4O_7)Na_2$ donnent une coupure en quatre particules à la limite, donc vraisemblablement $3(BO_2)^- + (BO)^+$.

Nous avons étudié alors les phosphates (ortho, pyro, méta) et les anions complexes dont les atomes centraux appartiennent à la 6e colonne.

Phosphates. — L'anion orthophosphorique $(PO_4)^{\equiv}$ n'est pas clivé à 995 °C. Nous trouvons donc un résultat identique à celui trouvé par Harrison à plus basse température [3]. L'idéalité de la solution a motivé notre seconde remarque faite plus haut.

Les pyrophosphates donnent deux particules à la limite : on peut donc penser à un clivage en $(PO_4)^{\equiv}$ et $(PO_3)^-$. Le type de clivage possible de $(PO_3)^-$ n'étant pas démontrable cryométriquement par suite de la première remarque générale et de la très grande difficulté d'étude d'une solution d'anhydride phosphorique.

Dérivés de la 6e colonne. — Les sulfates et chromates dans FNa ont été étudiés par Mlle Bourlange [4] qui a trouvé une non coupure pour les $(SO_4)^=$, une légère coupure pour les chromates. Les molybdates et tungstates ont été étudiés par Harrison [3] et Mergault [5] dans ClNa et dans la cryolithe. Comme ces auteurs nous avons trouvé dans le fluorure de sodium une légère coupure de l'anion complexe avec une chute lente vers une particule (voir *fig. n°* 1) et pour les tungstates une courbe pratiquement horizontale pour une particule traduisant une non coupure

Silicates. — Le métasilicate de sodium donne une courbe légèrement inclinée et tendant vers une particule à la limite. Il y a là une divergence avec les résultats obtenus par G. Petit [6] dans la cryolithe où cet auteur trouvait un clivage en silice et ion oxygène. Sans doute faut-il voir là une manifestation de l'affinité des particules aluminiques de la cryolithe pour l'ion oxygène.

En résumé, le fluorure de sodium est un solvant relativement médiocre, beaucoup plus voisin à ce point de vue du chlorure de sodium que de la cryolithe malgré l'identité des températures de fusion des fluorures simples et complexes.

Ceci révèle que les propriétés solvantes d'un sel, sont, toutes proportions gardées, plus fonction de sa structure que de sa température de fusion.

Lettre reçue le 4 juillet 1959.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Seyyedi (Ali) et Petit (G.), *C. R. Acad. Sc.* **249**, p. 505.
[2] Zarzycki, « Thèse de Doctorat de Sciences Physiques ». *Annales de Physique*, Masson, 1953.
[3] Harrison, « Thèse d'Université », Paris.
[4] Bourlange (Mlle Christiane), « Thèse d'Université ». *Annales de Physique*, Masson, édit., Paris (à paraître).
[5] Mergault, *C. R. Acad. Sc.*, 1953, **237**, 485.
[6] Petit (G.), La cryométrie à haute température. *Bull. Soc. Chim.*, 1956, n° 1.
[7] Seyyedi (Ali) et Petit (G.), *C. R. Acad. Sc.* **249**, p. 505.
[8] Zarzycki, *J. Physique Rad.* (Physique appliquée), 1957, **18**, 65 A.
[9] Doucet, *J. Chim. Phys.* (à paraître).

ÉTUDE COMPARATIVE DES SPECTRES D'ABSORPTION INFRAROUGE ET DE RÉSONANCE MAGNÉTIQUE NUCLÉAIRE (R. M. N.) DE SOLUTIONS D'EAU DANS DES CORPS ORGANIQUES

Par G. MAVEL,

Laboratoire de Spectroscopie hertzienne à la Sorbonne.

Introduction. — Nous avons complété certaines de nos mesures et repris celles d'autres auteurs [1, 2], sur la R. M. N. du proton de l'eau dans des corps organiques ; nous nous proposons de comparer ici ces résultats à ceux de E. Greinacher, W. Lûttke, R. Mecke [3], relatifs à l'absorption infra-rouge. Les solvants étudiés sont : CCl_4, CS_2, benzène, nitrométhane, acétonitrile, acétone, dioxane, éther, tétrahydrofuranne (T. H. F.), pyridine, cités dans l'ordre de $\Delta\nu = \nu_{gaz} - \nu_{solution}$ croissant [3]. Nous avons ajouté à cette liste : chloroforme, morpholine, pipéridine, α et β picolines, corps pour lesquels nous avons également mesuré le déplacement infra-rouge. Nous avons trouvé dans un travail assez ancien de W. Gordy [4] des éléments de comparaison intéressants avec D_2O.

Un parallèle de ce genre a déjà été établi, par W. G. Schneider, H. J. Bernstein, J. A. Pople [5] sur divers composés hydrogénés, mais avec des données infrarouges d'une grande diversité d'origine. Nous pensons que l'homogénéité de nos données donnera plus d'unité à notre travail. Nous nous proposons de comparer $\Delta\nu = \nu_{gaz} - \nu_{sol.}$ *mesuré sur les bandes fondamentales* ν_{OH} (moyenne de ν_σ et ν_π) et $\Delta\delta = \delta_{gaz} - \delta_{sol.}$ ($\delta_{sol.}$ étant, *lorsque le solvant n'agit pas par un groupement polaire contenant un H*, la position limite du déplacement δ pour une dilution infinie de l'eau). Comme précédemment [1], nous utilisons $\delta_{gaz} = 4{,}37$ en tenant compte de la température à laquelle ont été faites les mesures, 22 °C $\pm$ 2 [5].

Partie expérimentale. — Pour les corps se dissolvant dans l'eau en toutes proportions, nous avons établi les courbes $\delta(x)$; nous donnons (*fig.* 1), celles qui correspondent à l'acétonitrile, la morpholine et la pipéridine (pour laquelle nous avons complété des mesures de M. et R. Freymann) ; on notera que pour *ces deux derniers corps, qui contiennent des groupements* NH, il y a *triple échange* [6] entre les protons de H_2O, du complexe et du NH. Dans ce cas, la courbe aboutit à la position du NH pur, et non à $\delta_{sol.}$ que l'on obtient par un calcul [6].

Lorsque la solubilité de l'eau est faible, nous avons pris une solution saturée (CS_2, benzène) ou à 0,5 % d'eau, en volume.

Les mesures, en R. M. N., ont été faites avec un appareil Turb-Taüber (25 MHz ; échantillon tournant ; bandes latérales). La figure 1 donne la valeur de $\delta_{sol.}$ pour les corps étudiés ; pour la morpholine et la pipéridine, le calcul fournit $\Delta\delta = 3{,}6 \pm 1{,}3$ et $3{,}3 \pm 1{,}2$. On remarquera la position aberrante du sulfure de carbone ; on peut la rapprocher de celle du benzène, dont le désaccord est moins net, et qui est cependant cohérente avec les mesures de Cohen et Reid [2*a*].

Les mesures complémentaires, dans l'infrarouge, ont

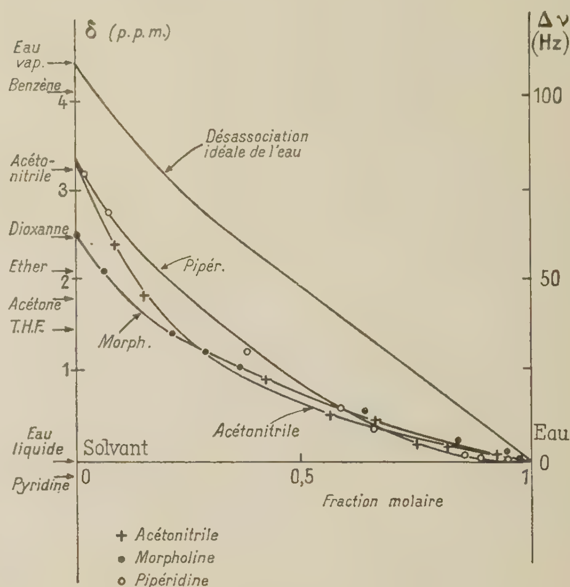


FIG. 1.

été effectuées (*) avec un appareil Perkin-Elmer 21, à prisme de NaCl, identique à celui de Greinacher, Lüttke et Mecke [3].

Discussion. — La figure 2 donne, dans les axes $\Delta\nu$ en cm^{-1} et $\Delta\delta$ en parties par million (p. p. m.), les points expérimentaux : on constate que la relation est sensiblement linéaire entre les résultats des deux méthodes. On constate également que parmi les corps s'écartant de la droite, l'un des plus significatifs est le benzène ; ce désaccord est difficile à interpréter. On notera que l'infra-rouge ne donne aucune différence entre les trois corps contenant O$<$ (dioxane, éther, T. H. F.), alors que la R. M. N. les sépare nettement ; il faut noter, à ce propos la faible dispersion du spectrographe infra-rouge dans la région 3 000-5 000 cm^{-1}.

Le tableau I fournit les valeurs de : $\Delta\delta$ en p. p. m. ; $\Delta\nu_{OH}$ (fréquence de valence), $\Delta\delta_{OH}$ (fréquence de déformation), pour H_2O, en cm^{-1} ; $\Delta\nu_{OD}$ (valence) pour D_2O [4] ; P. I., potentiel d'ionisation du solvant, donnant une évaluation de sa capacité de donneur [7] ; moment dipolaire de la molécule de solvant et moment de son orbitale associante (« lone pair dipole ») [8].

Dans le cas du chloroforme comme donneur [9], la comparaison des résultats de R. M. N. avec le P. I. et avec le moment de l'orbitale associante avait été satisfaisante, dans l'ensemble. Nous voyons que, pour les corps susceptibles de s'associer à l'eau, en agissant comme *accepteur*, il y a une corrélation qualitative, les picolines mises à part. Mais, vis-à-vis de la pipéridine, de la morpholine et de l'eau elle-même, l'eau agit, au moins partiellement, comme accepteur et c'est l'affinité électronique du solvant qu'il faudrait plutôt considérer. Dans les autres cas, le P. I. décroît lorsque $\Delta\delta$ croît. Le moment dipolaire de l'orbitale associante

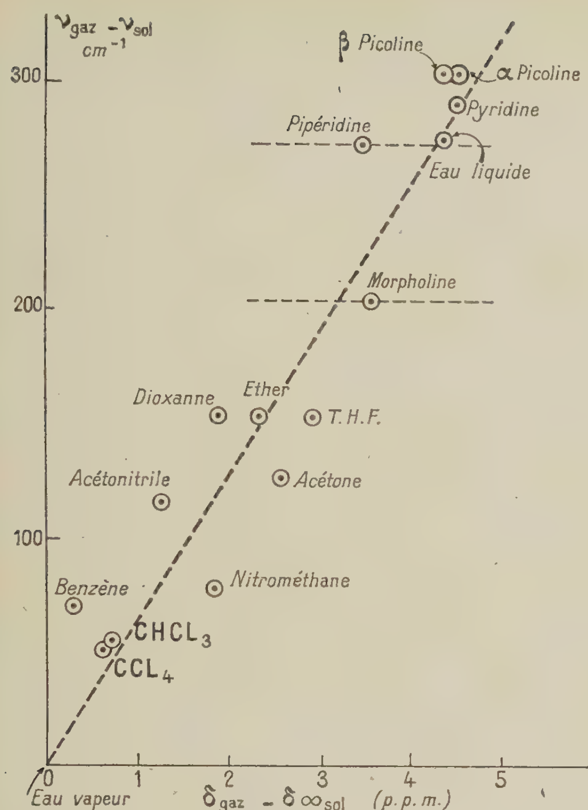


FIG. 2.

révèle des positions anormales, en particulier celles de l'acétone et surtout de l'*acétonitrile*, ce qui avait déjà signalé en infra-rouge [3].

Un dernier point intéressant à remarquer est l'écart plus ou moins grand par rapport à la désassociation parfaite, réalisée pour l'eau à l'état vapeur [5]. Cet

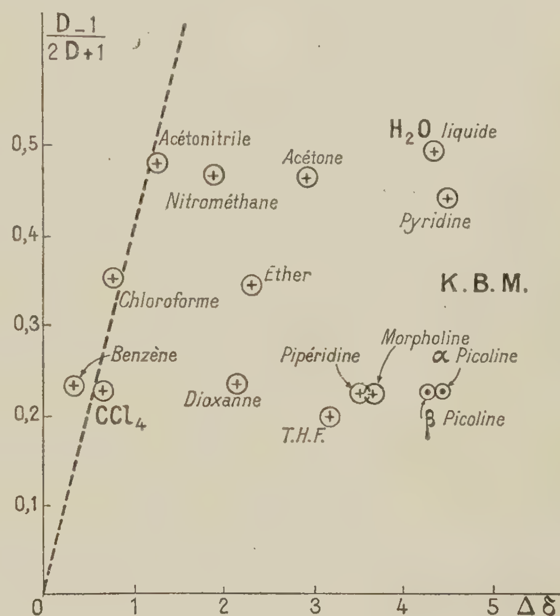


FIG. 3.

TABLEAU I

	Δδ p. p. m.	$\Delta\nu_{OH}$ cm^{-1} (3)	$\Delta\nu_{OD}$ cm^{-1} (4)	$\Delta\nu_{OH}$ cm^{-1} (3)	P. I. eV (7)	MOMENT DIP. TOTAL	MOMENT DIP. ORB. ASSOC. (8)
	—	—	—	—	—	—	—
H_3O vap.	(0)	(0)	(0)	(0)	—	—	—
CCl_4	0,62[2a]	45	—	0	11,5	0	—
CS_2	— 0,3 (?)	49	—	0	11,1	0	—
$CHCl_3$	0,75[2a]	54 *	—	—	11,4	1,02	—
Benzène	{ 0,29 0,12[2a]	70	—	0	9,2	0	—
Nitrométh.	1,88	78	—	— 28	—	3,25	—
Acétonitrile	1,22	115	138	— 31	—	3,9	3,74
Acétone	{ 2,62 2,6[2b]	127	—	— 36	9,7	2,88	3,03
Dioxane	1,93	153	—	— 43	9,5	0,4	2,78
Éther	2,11	153	—	— 43	9,5	1,22	2,78
T. H. F.	2,89	153	—	— 43	—	1,68	2,78
Morpholine	3,6	205 *	—	—	(—)	—	—
Pipéridine	3,3	275 *	315	—	(—)	—	—
β picoline	4,30	305 *	—	—	9,71	—	3,35
α picoline	4,45	305 *	277	—	9,66	—	3,35
H_2O liquide	4,37	276	277	— 42	(12,6)		—
Pyridine	4,50	292	265	— 55	9,2	—	3,35

* Nos mesures infra-rouge.

écart est dû à l'effet décrit par Kirkwood [10], Bauer et Magat [11] ; il est possible, comme dans l'infrarouge d'utiliser un diagramme $\Delta\delta$ fonction de $(D-1)/(2D+1)$, nous le donnons (*fig.* 3). On y constate que l'acétonitrile se conduit bien comme un solvant inerte, le nitrométhane étant plus actif. Les autres corps ont un comportement normal, compte tenu des propriétés que nous leur connaissons.

(*) Par les soins de Mme Dumain, du Laboratoire Central des Poudres, que nous tenons à remercier.

Lettre reçue le 11 juillet 1959.

Note ajoutée à la correction. — D'après Pople (*J. Chem. Phys.*, 1958, **28**, 601) le déplacement $\Delta\delta$ est proportionnel au carré du champ créé par le solvant, alors que $\frac{D-1}{2D+1}$ est proportionnel au champ lui-même. Le diagramme modifié en conséquence ne montre pas de différence essen- avec celui donné ici (fig. 3).

BIBLIOGRAPHIE

[1] MAVEL (G.), *C.R. Acad. Sc.*, 1959, **248**, 1505.
[2] *a*) COHEN (A.D.) et REID (C.), *J. Chem. Phys.*, 1956, **25**, 790 (mesures à 29°). *b*) DRINKARD (W.) et KIVELSON (D.), *J. Phys. Chem.*, 1958, **62**, 1494.
[3] *Z. Elektrochem.*, 1955, **59**, 23.
[4] *J. Chem. Phys.*, 1939, **7**, 93.
[5] *J. Chem. Phys.*, 1958, **28**, 601.
[6] MAVEL (G.), à paraître *J. Physique Rad.*
[7] Valeurs tirées de WATANABE, *J. Chem. Phys.*, 1954, **22**, 1564 et 1957, **26**, 542. HIGASI (K.), OMURA (I.) et BABA (H.), *J. Chem. Phys.*, 1956, **24**, 623. NAGAKURA (S.) et ANAKA (J. T.), *J. Chem. Phys.*, 1954, **22**, 236.
[8] SCHNEIDER (W. G.), *J. Chem. Phys.*, 1955, **23**, 26.
[9] KORINEK (G. J.) et SCHNEIDER (W. G.), *Canad. J. Chem.*, 1957, **35**, 1157.
[10] WEST (W.) et EDWARDS (R. T.), *J. Chem. Phys.*, 1937, **5**, 14 et 1939, **7**, 795.
[11] *J. Physique Rad.*, 1938, **9**, 319.

VALEUR APPROCHÉE DE QUELQUES MOMENTS QUADRIPOLAIRES ÉLECTRIQUES DE NOYAUX DE MASSE $A > 218$

par R. FOUCHER

Laboratoire de Physique Nucléaire
Orsay (Seine et Oise).

L'existence de moments quadrupolaires électriques liés à une déformation permanente des noyaux de N et Z éloignés des nombres magiques, même si leur spin est nul, est bien établie, mais leur relation avec les moments d'inertie correspondants reste un problème des théories du noyau et leurs déterminations expérimentales dans la région des masses atomiques $A > 210$ par spectrométrie optique ou par excitation coulombienne sont peu nombreuses et peu précises [1] [2] [3]. Les atténuations observées dans les corrélations angulaires α-γ (noyaux pair-pair) ont été expliquées par le couplage de ces moments avec les gradientsde champ électriques cristallins [4] et permettent de prévoir la valeur relative des vies moyennes de quelques niveaux de rotation. Les vies les plus longues ont été mesurées directement par la méthode des coïncidences différées (^{224}Ra, ^{226}Ra) [5] [6]. On en déduit les moments quadrupolaires à partir de la formule de Bohr et Mottelson [7], si on connait les coefficients de conversion interne [8]. La vie moyenne du niveau 2+ de 241 MeV du ^{220}Rn, noyau situé dans la zone de transition vibration-rotation [9], a été mesurée [10] et le moment Q_0 qui en est déduit se place bien sur la courbe extrapolée Q_0 (A) [1] ; ceci amène à penser que la formule de Bohr et Mottelson est utilisable dans la région $A > 218$ pour prévoir une valeur approximative des Q_0 et vies moyennes τ des niveaux à partir des corrélations angulaires α-γ des ^{220}Rn ^{222}Rn, ^{224}Ra, ^{226}Ra, ^{234}U [11] avec comme seules hypothèses supplémentaires que le noyau de recul est arrêté lorsqu'il émet le rayonnement γ (temps d'arrêt $\sim 10^{-12}$ sec) et que les gradients de champ électriques q des chlorures et nitrates de ces éléments sont identiques.

Dans ces conditions les fréquences d'interaction quadrupolaire sont toutes de la forme $\omega_n = a\ qQ_{0n}$ et les vies moyennes de la forme $\tau_n = b_n/Q_{0n}^2$; nous obtenons donc les valeurs relatives des Q_{0n} et τ_n à partir des produits $\omega_n\ \tau_n$ tirés des facteurs d'atténuation mesurés et si nous choisissons le ^{226}Ra comme noyau de référence ($\omega\tau \approx 1$, $\tau = 9.10^{-10}$ sec) ces valeurs sont :

N	$\omega_n\ \tau_n$	$\tau_n(10^{-10}$ sec)	Q_{0n} barn
—	—	—	—
^{220}Rn	$\sim 0{,}2$	$\sim$ 4,5	$\sim < 3 >$
^{222}Rn	0,4	6,3	$< 4 >$
^{224}Ra	1,3	12	6,5
^{226}Ra	1	9	7,5
^{234}u	0,7	5,6	8,6

La similitude des Q_{0n} et τ_n obtenus ainsi et par mesure directe ds vies moyennes pour les ^{220}Rn, ^{224}Ra, ^{226}Ra nous amène à estimer que Q_{0n} et τ_n (^{222}Rn et ^{234}U) sont correctes. Il est certainement très approximatif de supposer constant le produit $E_2 \times Q_0 \times A^5/_3$, où E_2 est l'énergie du niveau 2+ du noyau pair-pair de masse A ; cependant nous l'admettrons pour les noyaux voisins du ^{220}Rn dans la mesure où nous retrouvons ainsi une valeur voisine de 4 barns pour $< Q_0 >$(^{222}Rn) ; alors $< Q_0 >$(^{218}Rn) $\sim 2{,}1$ barns et Q_0(^{222}Ra) $\sim 6{,}6$ barns. Enfin à partir de Q_0(^{225}Th) et Q_0(^{228}Th) voisins de 7,5 et 8 barns et $Q_0(A > 238)$ inférieur à 14 barns, nous pouvons estimer la vie

moyenne des premiers niveaux correspondant. En résumé nous avons le tableau suivant :

N	E_2	$\tau(10^{-10}$ sec)	Q_0(barn)
^{218}Rn	325	$\sim$ 2,2	$\sim < 2 >$
^{220}Rn	241	4,5	$< 3 >$
^{222}Rn	187	6,3	$< 4 >$
^{222}Ra	111	7,8	6,6
^{224}Ra	84	12	6,5
^{226}Ra	68	9	7,5
^{226}Th	72	6,8	7,5
^{228}Th	57	3,5	8
^{232}Th	50		8,5
^{234}U	43,5	5,6	8,6
^{236}U	45		10,3
$A > 238$	> 40	$\geqslant 1$	< 14

Les valeurs de Q_0 et τ indiquées ne sauraient être qu'approchées et leur détermination par la mesure directe des vies moyennes et l'étude des corrélations angulaires α-γ est en cours. Elles permettent néanmoins de faire déjà plusieurs remarques sur les vies moyennes des premiers niveaux 2+ des noyaux pair-pair de masse $A > 218$ et sur leurs moments quadrupolaires :

1) Les vies moyennes expérimentales des premiers niveaux 2+ de cette région passent, lorsque A croit, par un maximum au ^{224}Ra puis restent supérieures à 10^{-10} sec ou de cet ordre. La valeur estimée pour $\tau(^{226}$Th) ne tient pas compte du fait que dans ce cas $E_2(^{226}$Th) $> E_2(^{226}$Ra) alors que l'énergie E_2 de l'isobare de Z le plus élevé est normalement la plus faible.

2) L'addition de deux neutrons fait varier le moment quadrupolaire moyen des Radons de 1 barn environ ; celui des radium varie moins. Par contre les moments varient approximativement de 2,5 à 3 barns lorsqu'on ajoute 2 protons au $^{220}_{86}$Rn et au $^{222}_{86}$Rn (Dans la région des terres rares cette variation brusque de Q_0 a lieu pour $N = 88$).

Lettre reçue le 24 juin 1959.

RÉFÉRENCES

[1] ALDER-BOHR et al., *Rev. of mod.*, 1956, **28** 432.
[2] NILSSON (S. G.), *Kgl Danske Mat. Fys.*, **1**, n° 8, 1959.
[3] NEWTON (J. O.), *Nuclear Physics* 1957, **3**.
[4] ABRAGAM et POUND, *Phys. Rev.*, 1953, **92**, 943.
[5] SIEKMAN (J. C.) et WAARD (H. DE), *Nucléar Physics*, 1958, **8**, n° 4.
[6] VARTAPETIAN (H.) et FOUCHER (R.), *C. R. Acad. Sc.*, 1958, **246**, 939.
[7] BOHR (A.) and MOTTELSON (B.), *Kgl Danske Mat. Fys. Medd.*, 1953, **27**, n° 16,
[8] SLIV et BAND, Publication acad. Sciences Moscou Léningrad 1958.
[9] SCHARFF-GOLDHABER (G.), *Phys. Rev.*, 1956, **103**, 837 et Congrès international de Physique nucléaire de Paris, Dunod 1958.
[10] SIEKMAN (J. G.) and POTT (G. T.), *Physica*, 1959, **25**, n° 2.
[11] NEWTON (J. O.), *Progress in nuclear Physics*, 1954, **4**, 234.

POUVOIR SÉPARATEUR ET EFFICACITÉ D'UN SPECTROMÈTRE β A ORBITES SPIRALES

Par Mme Adèle BURDET,

Institut de Physique Nucléaire, Université de Lyon.

Le principe de ce spectromètre, imaginé par G. Miyamoto [1], est basé sur les propriétés des trajectoires des particules chargées dans un champ magnétique de révolution.

Caractéristiques générales d'un champ magnétique de révolution. — Nous représenterons la variation de l'intensité d'un champ magnétique de révolution à l'aide des coordonnées cylindriques r, φ, z ; où l'axe des z est l'axe de symétrie du champ, et le plan $z = 0$ le plan équatorial de l'entrefer. Nous bornerons cette étude à ce plan. La variation de l'intensité en fonction de la distance à l'axe présente deux particularités essentielles : au voisinage de $r = 0$, la courbe $H(r)$ est tangente à une droite horizontale, le champ étant continu en chaque point ; pour r très grand devant le rayon des pièces polaires l'électro-aimant se comporte comme un doublet magnétique, $H(r)$ est en $1/r^3$.

On en déduit la courbe $rH(r)$ sur la figure 1.

Par suite la courbe $rA = \int r.H(r).dr$ sera assimilable à une parabole au voisinage de l'origine, puis le maximum de rH indique un maximum de pente pour rA et, enfin, à l'infini rA se comporte comme $-k/r$, hyperbole équilatère asymptote à une

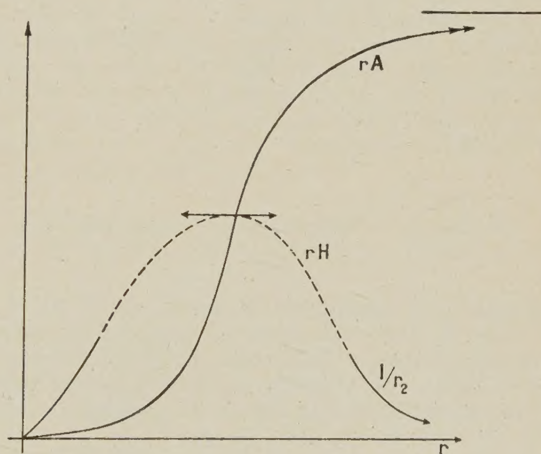


FIG. 1. — Courbes rH et $rA = \int r.H.dr$.

droite horizontale. Il y a donc pour rA un maximum de concavité, ceci quel que soit la topographie de H entre 0 et l'infini (*fig.* 1).

Équations du mouvement et forme des trajectoires. — Une particule chargée est soumise à la force de Lorentz $\boldsymbol{F} = e\ (\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{H})$. Le potentiel vecteur $\boldsymbol{A}$ se

réduit à sa composante $A\varphi$ d'après le choix des axes. L'équation des trajectoires décrites par ces particules est donnée par :

$$\varphi - \varphi_0 = \int_0^r \frac{rA/\rho H}{r\sqrt{r^2 - (rA/\rho H)^2}}\,dr$$

pour une particule issue du centre [2]. La forme des trajectoires dépend des racines du dénominateur de la fonction à intégrer. S'il admet une racine double la trajectoire correspondante est asymptote à l'orbite stationnaire instable relative à l'énergie considérée. Par contre pour une énergie inférieure la courbe décrite sera bornée, alors que la particule s'éloignera à l'infini si son énergie est plus grande. Il y a accumulation des particules sur l'orbite stationnaire (cercle de convergence).

Ainsi le champ magnétique va séparer les particules suivant leur énergie. Il pourra donc permettre de construire un spectromètre, et il suffira de placer un détecteur sur le cercle de convergence pour recueillir les particules de ρH donné soit $\rho H = B$.

Pouvoir séparateur. — Représentons le détecteur par un segment de 1 cm de longueur : une particule est détectée si sa trajectoire coupe ce segment. On peut voir sur la figure 2 que certaines des particules de ρH

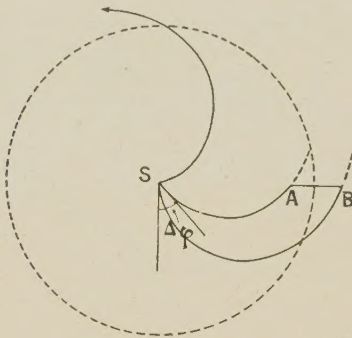


Fig. 2. — Définition de l'angle utile.

différents de B atteignent le détecteur, il est donc nécessaire de faire une étude du pouvoir séparateur. Pour cela définissons l'angle utile du spectromètre pour un ρH donné : c'est l'angle $\Delta\varphi(\rho H)$ à l'intérieur duquel doit se trouver la vitesse initiale de la particule considérée pour qu'elle soit détectée (*fig.* 2).

L'étude de la variation de $\Delta\varphi$ en fonction de ρH va nous permettre de déterminer le pouvoir de résolution, défini par : $\delta(\rho H)/B$, ($\delta(\rho H)$ étant la largeur de la raie). Nous nous donnons la probabilité pour qu'une particule d'énergie correspondant à ρH soit émise : $n(\rho H)$. Pour qu'elle soit détectée il faut que $\Delta\varphi(\rho H)$ ne soit pas nul, le nombre de particules détectées sera donc :

$$N = \int n(\rho H).\Delta\varphi(\rho H).\mathrm{d}(\rho H).$$

En supposant une raie gaussienne théorique à l'entrée du spectromètre, on peut en déduire le profil de la raie qu'il restitue. La forme de $\Delta\varphi(\rho H)$ montrée sur la figure 3 laisse prévoir une raie fortement dissymétrique présentant un pied élevé du côté des ρH plus grand que B (*fig.* 4). Il faut chercher une position du détecteur en le décalant vers l'extérieur du spectromètre ou au contraire vers le centre.

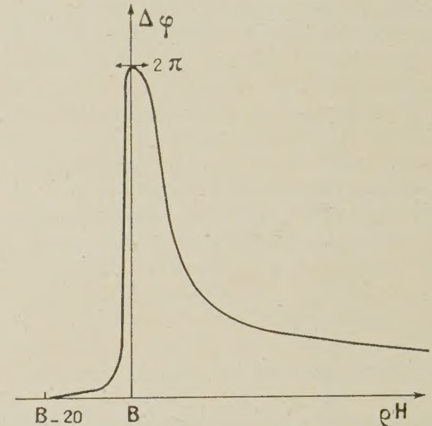


Fig. 3. — Variation de $\Delta\varphi$ autour de B.

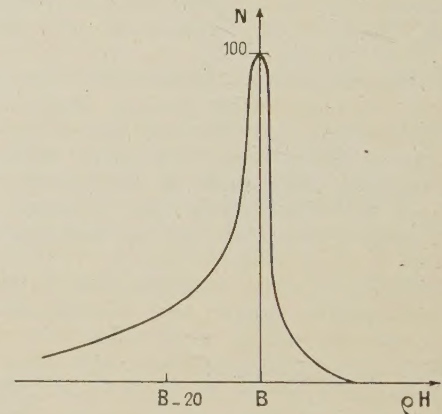


Fig. 4. — Profil de raie.

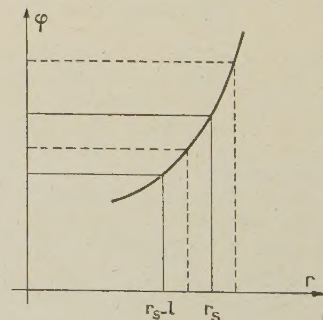


Fig. 5. — Variation de φ en fonction de r pour $\rho H > B$.

D'après la variation de φ en fonction de r, la différence $\varphi_r - \varphi_{r-l}$ est plus faible quand on se rapproche du centre (*fig.* 5), il faudra donc mettre le détecteur le

plus au centre possible, c'est-à-dire de façon que le bord externe coïncide avec le cercle de convergence.

Avec une topographie de $H(r)$ donnant une orbite stationnaire de rayon 15 cm pour une particule d'énergie correspondant à $\rho H = 2\,000$ gauss.cm, on a obtenu un pouvoir séparateur de 0,6 %.

Généralisation. — Nous allons étendre ces résultats à une source circulaire utilisée en réalité. On peut la considérer comme constituée par une infinité de sources élémentaires ponctuelles, situées à la distance r_0 du centre. Pour de telles sources, pour une énergie donnée il y a plusieurs types de trajectoire suivant l'angle de tir α de la particule [3]. Pour $\alpha = \lambda$ la trajectoire est la spirale, si $\alpha < \lambda$ la trajectoire est à branche infinie, et si $\alpha > \lambda$ on a affaire à une trochoïde (*fig.* 6).

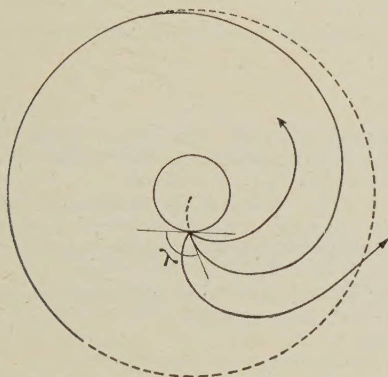


FIG. 6. — Trajectoires pour $\alpha = \lambda$, $\alpha < \lambda$ et $\alpha > \lambda$.

Soit $u(\alpha)_{\rho H}$ l'arc sur lequel doit se trouver la source élémentaire pour que la particule d'énergie déterminée atteigne le détecteur. Pour un ρH donné on peut tracer la courbe $u(\alpha)$, la surface délimitée par cette courbe représente le nombre de particules recueillies ; pour la source ponctuelle ce nombre était représenté par $\Delta\varphi$, ainsi $\int u(\alpha)\,d\alpha$ généralise la notion d'angle utile.

Notion d'efficacité. — Nous appellerons efficacité du spectromètre relative à la quantité de mouvement ρH le rapport :

$$E_H = \frac{\text{nombre de particules d'énergie } \rho H \text{ recueillies}}{\text{nombre de particules de cette énergie émises}}.$$

Ce rapport est aussi égal au rapport de la surface délimitée par $u(\alpha)$ à celle du rectangle $2\pi \times \pi$, chaque source ponctuelle émettant dans π, et il y a 2π sources ponctuelles.

Pour une source circulaire de diamètre 5/10 mm nous avons trouvé une efficacité de 40 %, tandis que l'on peut atteindre 80 % pour une source de 2/10 mm de diamètre. Pour la première le pouvoir séparateur est devenu 0,65 %, soit légèrement plus faible que pour une source ponctuelle.

Influence du centrage de la source. — On a également montré que si la source s'éloigne du centre l'efficacité diminue très rapidement et varie suivant les positions relatives de la source et du détecteur.

Le spectromètre β à orbites spirales peut atteindre une efficacité de 80 % et un pouvoir séparateur de 0,6 %. Il faut que la source soit parfaitement centrée, ce qui impose un champ rigoureusement de révolution et une détermination précise de la position de l'axe de symétrie. Cet appareil de précision, sera utile surtout pour l'étude de sources dont l'activité spécifique est très faible (grand pouvoir de transmission).

Lettre reçue le 17 juillet 1959.

BIBLIOGRAPHIE

[1] MIYAMOTO (G.), *Proc. Phys. Math. Soc.*, Japan, 1943, **17**, 587.
[2] BURDET (A.), *Thèse*, Lyon, 1959.
[3] LAFOUCRIÈRE (J.), *Thèse*, Lyon, 1950. BASTARD (C.) et LAFOUCRIÈRE (J.), *J. Physique Rad.*, 1958, **19**, 674.

CALCUL DES VIBRATIONS FONDAMENTALES DES MOLÉCULES CO_2 ET CS_2 COMPTE TENU DE L'ANHARMONICITÉ

Par Itaru GAMO,
Laboratoire de Chimie,
Université de Waseda, Tokio, Japon.

Nous avons calculé les vibrations normales de CO_2 et de CS_2 à l'aide de la fonction potentielle la plus générale, en tenant compte de l'anharmonicité des vibrations. Les fréquences normales (fréquences d'ordre zéro) adoptées dans ce calcul sont celles estimées par Dennison [1] pour CO_2 et par Wentink [2] pour CS_2. Le tableau suivant donne leurs nombres d'onde en cm^{-1}, avec les fréquences fondamentales correspondantes observées.

	FRÉQUENCES NORMALES (ω)	FRÉQUENCES FONDAMENTALES (σ)	TYPE DE VIBRATION
CO_2	1 351,2	1 388,4	Σ_g^+
	672,2	667,3	Π_u
	2 396,4	2 349,4	Σ_u^+
CS_2	671,4	658,0	Σ_g^+
	398,6	396,8	Π_u
	1 551,9	1 532,5	Σ_u^+

Les constantes de force ont été calculées à partir de la fonction potentielle suivante :

$$2V = k_1 \{ (\Delta R_1)^2 + (\Delta R_2)^2 \} + k_\delta (\Delta\theta)^2 + k_{12}(\Delta R_1)(\Delta R_2)$$

où ΔR_1, ΔR_2 et $\Delta\theta$ sont les variations des distances C-O ou C-S et de l'angle $\widehat{\text{O-C-O}}$ ou $\widehat{\text{S-C-S}}$ à partir de la position d'équilibre.

On a admis que les angles ont pour valeur 180° pour les deux molécules.

On a les relations suivantes :

$$\lambda_1 = \frac{k_1 + k_{12}}{m_y}$$

$$\lambda_2 = 2\left(\frac{1}{m_y} + \frac{2}{m_x}\right)\frac{k_\delta}{R^2}$$

$$\lambda_3 = \left(\frac{1}{m_y} + \frac{2}{m_x}\right)(k_1 - k_{12})$$

où $\lambda = 4\pi^2 c^2 \omega^2/N$; c est la vitesse de la lumière, N le nombre d'Avogadro, m_x la masse atomique du carbone, m_y celle de l'oxygène ou du soufre.

Pour ces valeurs, on a adopté respectivement 12,003844, 16,000000 et 31,982274.

$c = 2{,}997902 \times 10^{10}$ cm/sec, $N = 6{,}02544 \times 10^{23}$, R est la distance d'équilibre de la liaison C-O ou C-S. On a calculé les valeurs suivantes des constantes de force (en dynes par centimètre.10^5).

	k_1	k_{12}	k_δ/R^2
CO_2	15,980	2,441	0,5807
CS_2	7,8279	0,6615	0,2352

Lettre reçue le 16 juillet 1959.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DENNISON (D. M.), *Rev. Mod. Physics*, 1940, **12**, 175.
[2] WENTINK (T.), Jr., *J. Chem. Phys.*, 1958, **29**, 188.

REVUE DES LIVRES

PAULI (W.), **Théorie de la relativité.** (1 vol. relié 15,5 × 25 cm, de 241 p., Pergamon Press, Londres et N. Y., 1958. Prix 35 shillings) (en anglais).

En 1921, le jeune Pauli, âgé de 21 ans donnait un livre aujourd'hui classique : *Relativitäts theorie.* Trente-cinq ans plus tard, paraît une traduction anglaise de cet ouvrage. Mais, à la fin, 26 pages de notes donnent un sommaire des progrès effectués. Signalons deux notes importantes sur la différentiation covariante dans un espace à connexion affine, et sur le problème cosmologique. Enfin dans la dernière note (9 pages à elle seule), le vieux et illustre physicien (il devait disparaître peu après) donne son opinion sur les tentatives de théorie unitaire. Il examine la théorie d'Einstein et Kaufmann avec g_{ik} et Γ^i_{kl} dissymétriques, et la théorie de Kaluza dans l'espace à cinq dimensions. Il présente de sévères objections et ne cache pas son scepticisme. Même l'unification de la gravitation et de l'électromagnétisme est un échec, pour ne pas parler de l'unification de la Relativité générale et des quanta, irréalisable du point de vue Bohrien, qui est celui de M. Pauli.

J. WINTER.

KRISHNAN (R. S.), **Progrès en physique cristalline. (Progress in crystal physics.)** 1 vol., 19 × 25 cartonné ; 198 pages. Central Art Press, « Aeton Lodge », Chetput, Madras 31.

L'Académie Indienne des Sciences a été depuis plus de quinze ans à l'avant-garde des travaux de physique du solide et tout particulièrement de l'état cristallin. Les très nombreux travaux sur le spectre Raman, les propriétés élastiques, photoélastiques, thermiques, magnéo-optiques et diélectriques des cristaux, font que ces laboratoires occupent une position unique dans ces domaines de recherches.

Le Docteur R. S. Krishnan aidé des nombreux spécialistes de l'Académie Indienne des Sciences (Vedam, Sundara Rao, Ramasesham, Narasunham, etc...) présente ici une monographie d'un intérêt considérable pour les chercheurs qui abordent les problèmes de physique cristalline.

Les septs chapitres de cette monographie sont : 1° Dislocation thermique. 2° Conductibilité thermique. 3° Propriétés élastiques. 4° Propriétés photoélastiques. 5° Comportement thermo-optique. 6° Effet Faraday. 7° Comportement diélectrique.

Chaque chapitre contient une brève étude théorique, une description des méthodes expérimentales de mesures, les résultats obtenus et une discussion.

Des tableaux très complets de constantes numériques suivent chaque chapitre, ainsi qu'une liste très abondante de références bibliographiques, à jour jusqu'à décembre 1957.

Les cristaux métalliques et les matériaux polycristallins sont exclus de cette monographie.

La présentation du livre est agréable et pratique ; l'ouvrage est bien imprimé et très aéré.

S. PAUTHIER.

DOUCET (Y.), **Techniques modernes et applications de la cryométrie.** (1 vol. relié, 17 × 11 cm, 225 pages. Monographies Dunod, Paris, 1959.)

L'étude des lois de Raoult régissant l'abaissement de température de congélation des solutions organiques ou non fait partie depuis longtemps des programmes du baccalauréat. Malheureusement, les ouvrages élémentaires qui traitent de la cryométrie n'indiquent comme application que la détermination « approchée » des masses molaires, ce qui laisse penser qu'il s'agit là d'une méthode imprécise aux applications limitées.

Or, il n'en est rien. Depuis Raoult (c'est-à-dire 1880-1900) les techniques se sont notablement améliorées. En particulier, la méthode dite d'équilibre dans laquelle on cherche la concentration d'une solution, dont le point de fusion-congélation est stable et bien déterminé, donne des résultats d'une grande précision.

Aussi les applications actuelles sont-elles nombreuses et variées. L'auteur en décrit une quinzaine après avoir soigneusement passé en revue tous les perfectionnements qui ont été apportés récemment aux appareils utilisés, aux méthodes physiques de mesure de la concentration, à l'équilibre adiabatique et à la technique de la prise de température.

Ouvrage qui sera extrêmement utile à tous ceux : Physiciens, Chimistes, Biologistes, Médecins, Ingénieurs agronomes, qui utilisent la cryométrie comme technique de recherches.

P. ROUARD.